THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alain BENSOUSSAN

1re THÈSE. - SUR L'IDENTIFICATION ET LE FILTRAGE DE SYSTÈMES GOUVERNÉS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

2e THÈSE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : SUR QUELQUES ENSEMBLES ALÉATOIRES

Soutenues le 19 Mars 1969 devant la Commission d'examen.

M. LICHNEROWICZ	*Président*
M. KAHANE	*Examinateurs*
M. LIONS	
M. NEVEU	

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alain BENSOUSSAN

1re THÈSE. - SUR L'IDENTIFICATION ET LE FILTRAGE DE SYSTÈMES GOUVERNÉS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

2e THÈSE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : SUR QUELQUES ENSEMBLES ALÉATOIRES

Soutenues le 19 Mars 1969 devant la Commission d'examen.

M. LICHNEROWICZ	*Président*
M. KAHANE	*Examinateurs*
M. LIONS	
M. NEVEU	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. - Idées générales.

Nous nous intéressons dans ce travail aux problèmes d'identification et d'estimation concernant les systèmes physiques gouvernés par des équations linéaires, de type évolutif ou non (et plus particulièrement par des équations aux dérivées partielles linéaires). Le modèle mathématique est le suivant :

ζ_0 , ζ_1 , Φ_0 , . . . Φ_N , K sont des espaces de Hilbert;

$P \in \mathcal{L}(\zeta_0 ; \zeta_1)$; $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(\zeta_0 ; \Phi_i)$, $i = 1 \ldots N$; $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Phi_0 ; \zeta_1)$; $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\zeta_0 ; K)$. On considère les équations

$$\left.\begin{aligned} &(1.1) \quad Pz = B\xi + f \\ &(1.2) \quad \mathcal{A}_i z = \xi_i, \qquad i = 1 \ldots N \\ &(1.3) \quad Y = \mathcal{F}z + \eta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On appelle *état* z du système la solution supposée unique de (1.1) et (1.2) (par exemple (1.1) est l'équation aux dérivées partielles proprement dite, (1.2) représente les conditions aux limites ou initiales). Les éléments ξ et ξ_i sont appelés *entrées* du système. Les entrées sont en général des processus stochastiques dont les caractéristiques sont supposées connues.

En pratique dans un système physique l'état n'est pas accessible à la mesure. On appelle *sortie*, ou *observation*, ce qui est accessible à la mesure : d'où l'équation (1.3) qui définit l'observation ; η représentant l'erreur de mesure est un processus stochastique de caractéristiques connues.

Nous nous sommes intéressés à deux types de problèmes :

— *Un problème d'identification :* On suppose que l'opérateur P (ou les $\mathcal{A}_i$) dépend d'un paramètre $u \in U$ = espace des paramètres (espace de Hilbert). Il s'agit alors d'identifier « au mieux » le paramètre sur le vu de l'observation Y.

— *Un problème d'estimation :* Les opérateurs P, $\mathcal{A}_i$ sont supposés parfaitement connus. L'état z est aléatoire, puisque les entrées sont aléatoires. L'observation Y est également aléatoire et on peut calculer ses caractéristiques. Il s'agit alors d'estimer « au mieux » l'état sur le vu de l'observation Y.

2. - Précisions sur les problèmes et les méthodes.

La première difficulté rencontrée se situe dans la nature des processus stochastiques intervenant dans le modèle (1), (2). Dans la pratique, pour les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (ou différentielles) les différents espaces de Hilbert

que nous avons mentionnés sont des espaces fonctionnels (en général des espaces de Sobolev). L'état, les entrées, la sortie du système sont des fonctions de variables d'espace x et du temps t. Les processus stochastiques que les ingénieurs ont alors l'habitude de considérer sont du type « bruit blanc ». Il s'agit donc de trouver un modèle mathématique rigoureux du bruit blanc. Plusieurs sont possibles. Dans le cas de systèmes décrits par des équations différentielles, où la seule variable est le temps, la théorie la plus courante est celle de ITO ([23], [15]). L'outil de base est « l'intégrale stochastique » et le bruit blanc se définit alors comme la dérivée du processus de Wiener. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, où intervient à la fois x et t, la théorie des intégrales stochastiques (qui reste à faire) est difficile à utiliser. On peut songer aux distributions aléatoires (cf. [20], [18]), ce qui semble possible.

Il nous a semblé préférable d'utiliser la théorie des fonctions aléatoires linéaires et des mesures cylindriques (cf. [46], [14], [20]). L'avantage essentiel est que l'on peut alors envisager une situation abstraite (en parlant par exemple comme dans (1), (2) d'espaces de Hilbert quelconques) sans référence à des espaces fonctionnels précis.

Le problème qui se pose alors est du type statistique. La théorie de l'estimation est bien connue dans le cas des variables aléatoires, à un nombre fini de dimensions où on considère en particulier trois types d'estimateurs, estimateur bayésien, estimateur des moindres carrés, estimateur du maximum de vraisemblance. Nous avons étudié alors dans quelle mesure se généralisaient ces méthodes lorsqu'on travaille avec des fonctions aléatoires linéaires (Chap. I).

Le Chapitre II est consacré à l'application des méthodes du Chapitre I, au problème de l'identification d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit alors, plus précisément de fournir des algorithmes constructifs d'approximation des différents estimateurs (bayésien et des moindres carrés). Les méthodes de l'analyse numérique jouent alors un rôle fondamental.

Le Chapitre III est consacré au filtrage. Le problème le plus intéressant concerne le cas d'évolution. On dispose alors d'une observation Y (t), sur $[0, T]$, où T représente le temps présent. On veut estimer z (T) état présent du système, de façon récursive, c'est-à-dire que l'application $T \to \hat{z}$ (T) (où $\hat{z}$ (T) est le meilleur estimateur de z (T)) soit une loi d'évolution calculable. Les résultats équivalents pour les équations différentielles sont dus à BUCY-KALMAN [12].

Le Chapitre IV présente des résultats numériques concernant les modèles du Chapitre II.

3. - Analyse des différents chapitres.

3.1. - Chapitre I : Mesures cylindriques et théorie de l'estimation.

On considère une fonctionnelle aléatoire linéaire $Y_k(\omega ; u)$ sur l'espace de Hilbert K, dépendant du paramètre $u \in U$, à laquelle correspond une mesure cylindrique $g(u)$ sur K, d'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et d'opérateur de covariance $\Lambda(u)$. On envisage essentiellement deux cas :

a) $Y_k(\omega ; u) = \big(k, Y(\omega ; u)\big)$

ce qui est une situation statistique habituelle puisque Y $(\omega ; u)$ est une variable aléatoire à valeur dans K. On définit alors un estimateur de Bayès du paramètre. Dans le cas Gaussien, on construit une famille d'approximation de l'estimateur de Bayès et on démontre un théorème de convergence.

b) $Y_k(\omega ; u) = \big(\overline{Y}(u), k\big) + \eta_k(\omega)$

ce qui correspond à $\Lambda(u) = \Lambda$ indépendant de u et on suppose Λ inversible. Le schéma b) ne se ramène pas au schéma a) et la situation statistique n'est plus habituelle. Cependant l'algorithme d'approximation défini en a) conserve un sens et on démontre qu'il converge vers un élément dont on donne ensuite une interprétation probabiliste.

On étudie ensuite la méthode des moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance dans les cadres de b) et du problème de l'estimation de l'état.

3.2. - Chapitre II : Identification de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles.

On montre que dans des cas assez généraux, les hypothèses nécessaires pour la validité des théorèmes d'approximation du Chapitre I sont vérifiées. Seul, d'ailleurs en pratique le cas a) nécessitera cette vérification. Nous considérons par exemple un problème elliptique :

$$A(u)\, z = f + B\,\xi(\omega) \qquad \omega \in \Omega \tag{3}$$

où $z \in V$ espace de Hilbert ; $A(u) \in \mathcal{L}(V ; V')$, $\forall\, u \in U_0$ = convexe fermé borné de U ; $< A(u)\,\varphi, \varphi > \geqslant \alpha \;\|\varphi\|_V^2$, $\forall\, \varphi \in V$, $\forall\, u$, $\alpha > 0$. Le couple $\Omega \times U_0$ étant muni d'une certaine loi de probabilité (puisque U_0 est probabilisé grâce à l'artifice bayésien), il faudra vérifier que $z(\omega, u)$ solution de (3) est bien une variable aléatoire à valeurs dans V. Pour cela la situation courante sera de démontrer que l'application $u, \xi \to z$ est continue. On utilise ensuite pour expliciter l'algorithme bayésien les méthodes connues d'analyse numérique.

La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'application de la méthode des moindres carrés. Considérons par exemple :

$$A(u)\, z = f \tag{4}$$

et une observation

$$Y = \mathcal{C} z(u) + \eta, \tag{5}$$

on cherche u de façon à minimiser

$$J(u) = \left(\Lambda^{-1}\left(Y_d - \mathcal{C} z(u)\right), Y_d - \mathcal{C} z(u)\right). \tag{6}$$

Pour définir un algorithme constructif, il est intéressant de considérer (4) comme une contrainte, et d'utiliser la pénalisation.

On approche (6) par :

$$J_\epsilon(z, u) = \left(\Lambda^{-1}(Y_d - \mathcal{C} z), Y_d - \mathcal{C} z\right) + \frac{1}{\epsilon}\left|A(u)\, z - f\right|^2. \tag{7}$$

On démontre alors des théorèmes de convergence concernant l'approximation du problème (6), par le problème (7). On étudie ensuite la discrétisation de (7) et la convergence du problème discrétisé, ce qui fournit l'algorithme recherché.

3.3. - Chapitre III : Estimation et filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Considérons par exemple le cas parabolique (les problèmes les plus intéressants concernent le cas évolutif), soit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = f + B(t)\,\xi(t) \\ &y(0) = \zeta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$z(t) = \mathcal{C}(t)\, y(t) + \eta(t). \tag{9}$$

Au triplet $\{\xi, \zeta, \eta\}$ est associée une mesure cylindrique d'espérance mathématique $(\bar{\xi}(t), \bar{\zeta}, 0)$ et d'opérateur de covariance $\begin{pmatrix} Q(t) & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & R(t) \end{pmatrix}$

où $Q(t)$, P_0, $R(t)$ sont supposés inversibles.

On estime ξ et ζ au sens des moindres carrés, sur le vu de $z(t)$, $t \in [0, T]$ en minimisant

$$J(\xi, \zeta) = \left(P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}\right) + \int_0^T \left(Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) - \overline{\xi}(t)\right) dt \qquad (10)$$

$$+ \int_0^T \left(R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}y(\xi, \zeta; t)\right), \left(z(t) - \mathscr{C}y(\xi, \zeta; t)\right)\right) dt.$$

Soit $\hat{\xi}_T(t), \hat{\zeta}_T$ l'estimateur optimal. On s'intéresse alors à

$$e(T) = y(\hat{\xi}_T, \hat{\zeta}_T; T) \qquad (11)$$

estimateur optimal de l'état (présent) $y(T)$ du système. On donne une loi d'évolution de $e(T)$ lorsque T varie (filtre). On considère l'erreur d'estimation

$$\epsilon(T) = e(T) - y(T), \qquad (12)$$

et on montre qu'à $\epsilon(T)$ est associée une mesure cylindrique d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance P (T) solution d'une équation de type Riccati.

On étudie ensuite la dualité entre les problèmes d'estimation et de contrôle en généralisant les résultats connus en dimension finie. On donne un moyen systématique de construction des systèmes duaux, et on montre que le problème dual d'un problème pénalisé est un problème régularisé.

Grâce à la dualité, on démontre que les hypothèses d'inversibilité de $Q(t)$ et P_0 ne sont pas nécessaires, ce qui permet d'étudier le comportement à l'infini de l'équation de Riccati lorsque $P_0 = 0$, (situation analogue connue en dimension finie).

On s'intéresse également aux estimateurs $e_L(t)$ de $y(t)$ de la classe

$$\left.\begin{aligned} &\frac{de_L}{dt} + A(t)\, e_L = f + B(t)\,\overline{\xi}(t) + L(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t)\, e_L(t)\right) \\ &e_L(0) = \overline{\zeta}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

On cherche ensuite s'il existe un $\hat{L}(t)$ minimisant l'opérateur de covariance de l'erreur $\epsilon_L(t) = e_L(t) - y(t)$ (au sens $P_1 \geqslant P_2$ si $P_1 - P_2$ est défini positif). On démontre qu'il en existe un, unique et $e_{\hat{L}}(t)$ coïncide alors avec l'estimateur des moindres carrés $e(t)$ étudié précédemment. Dans le cas où $R(t) = 0$, il n'existe plus de filtre, mais il existe toujours un estimateur optimal au sens des moindres carrés. On démontre qu'on peut alors l'approximer par un filtre.

On étudie enfin dans quelle mesure les résultats sur la contrôlabilité et l'observabilité stochastique connus en dimension finie peuvent se généraliser en dimension infinie.

3.4 - Chapitre IV.

On traite deux exemples numériques d'identification d'équations aux dérivées partielles. L'un par la méthode bayésienne pour identifier des coefficients de l'opérateur, l'autre par la méthode des moindres carrés pour identifier la valeur initiale d'un problème parabolique.

4. - *Conclusion*.

Le problème de l'identification d'équations aux dérivées partielles avait été très peu abordé auparavant. En général, on se contente de travailler sur une approximation par discrétisation, et d'employer les méthodes traditionnelles. Notre travail a donc consisté essentiellement à montrer la convergence de ces méthodes, lorsque la discrétisation est convenablement faite, vers des éléments qui peuvent s'interpréter du point de vue statistique.

Le problème du filtrage avait été abondamment étudié pour les équations différentielles linéaires, mais n'avait pas été considéré pour les équations aux dérivées partielles. Nous avons montré que les résultats de BUCY-KALMAN peuvent se généraliser pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type évolutif.

Chaque chapitre commence par une introduction et un plan détaillé.

Qu'il me soit permis d'exprimer à M^r LIONS ma très respectueuse reconnaissance. Sans

son aide constante et sans ses suggestions toujours très précieuses, il m'aurait été impossible de mener à bien ce travail.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à M^r^ NEVEU, qui m'a suggéré de nombreuses améliorations de mon texte initial, à M^r^ LICHNEROWICZ d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury et à M^r^ KAHANE de nous faire l'honneur d'y participer.

Je voudrais exprimer à M^r^ LAUDET, Directeur de l'IRIA, toute ma reconnaissance pour les facilités qu'il m'a accordées dans la réalisation de ce travail, à J.-P. YVON et C. LE MARÉCHAL pour avoir réalisé la mise au point des programmes numériques, à A. BOSSAVIT, P. FAURRE, P. KENNETH et J.-C. NÉDELEC pour leur amicale collaboration.

Je remercie enfin M^r^ GALULA et M^r^ PÉREZ d'avoir mené à bien la réalisation matérielle de ce travail.

CHAPITRE I :

MESURES CYLINDRIQUES ET THÉORIE DE L'ESTIMATION

Introduction

Dans ce chapitre nous donnons les principaux outils probabilistes et statistiques, qui nous serviront par la suite.

Dans le paragraphe 1 nous donnons les rappels fondamentaux sur les mesures cylindriques : au n° 1 les définitions et résultats essentiels, au n° 2 l'interprétation probabiliste empruntée à L. SCHWARTZ [52] [1], au n° 3 nous présentons la mesure cylindrique de Gauss, qui est en pratique la plus importante.

Aux paragraphes 2 et 3 nous formulons les deux méthodes d'estimation statistique que nous utiliserons, la méthode bayésienne et la méthode des moindres carrés. Au numéro 4 nous présentons l'estimateur bayésien puis au numéro 5 nous donnons un algorithme de calcul pour l'obtenir. Au numéro 6 nous étudions ce que devient la théorie bayésienne dans le cas important du « bruit blanc », que nous définissons de façon précise comme une mesure cylindrique, ne se réduisant pas à une loi de probabilité. Les numéros 7 et 8 fournissent les principales propriétés de la méthode des moindres carrés.

Plan détaillé.

§ 1 : Rappels sur les mesures cylindriques.

1. *Notions fondamentales.*
   1.1. Définitions.
   1.2. Image d'une mesure affine.
   1.3. Mesures cylindriques.
2. *Interprétation probabiliste.*
   2.1. Définitions.
   2.2. Propriétés fondamentales.
   2.3. Transformation par une application linéaire et continue.
3. *Mesure cylindrique de Gauss.*
   3.1. Définition.
   3.2. Recherche d'une loi de probabilité sur Φ.

§ 2 : Estimation au sens bayésien.

4. *Notion d'estimateur bayésien.*
   4.1. Quelques définitions.
   4.2. Définition de l'estimateur bayésien.

(1) Signalons la théorie des processus linéaires de X. FERNIQUE [22] qui est un modèle probabiliste à peu près équivalent.

5. *Algorithme d'approximation de l'estimateur bayésien.*

5.1. Description générale de l'algorithme.
5.2. Convergence de l'algorithme.

6. *Estimation bayésienne pour des observations de type « bruit blanc ».*

6.1. Définition du problème - Hypothèses - Notations.
6.2. Convergence des estimateurs de Bayes approchés.
6.3. Estimateur bayésien et maximum de vraisemblance.
6.4. Cas particulier du bruit blanc.
6.5. Interprétation de la loi de probabilité à postériori.

§ 3 : Estimation au sens des moindres carrés.

7. *Modèle n° 1 : Le paramètre à estimer est « déterministe ».*

7.1. Hypothèses - Notations - Le Problème.
7.2. Motivation du critère des moindres carrés.

8. *Modèle n° 2 : Le paramètre à estimer est « stochastique ».*

§ 1 : Rappels sur les mesures cylindriques.

1 - Notions fondamentales.

1.1 - Définitions.

Soit Φ un espace topologique, $\mathscr{B}(\Phi)$ l'espace des fonctions continues bornées sur Φ, muni de la norme du *sup*; $\mathscr{B}(\Phi)$ est un espace de Banach. On posera :

Définition 1.1 : Une mesure de Radon bornée sur Φ est une forme linéaire et continue m sur $\mathscr{B}(\Phi)$ qui vérifie la condition : $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists$ K compact tel que, $\forall f \in \mathscr{B}(\Phi)$ avec $\| f \|_{\mathscr{B}(\Phi)} \leqslant 1$ [1] et $f = 0$ sur K, on ait $| m(f) | \leqslant \epsilon$ ■ [2].

Nous supposons maintenant que Φ est un *Espace Vectoriel Topologique.* Nous notons Φ' son dual topologique et Φ^* son dual algébrique. Nous désignons par Φ faible, l'espace Φ muni de la topologie affaiblie $\sigma(\Phi\ ;\ \Phi')$; Φ' est également le dual topologique de Φ faible. En désignant par $\mathscr{C}(\Phi)$ l'espace des fonctions réelles continues définies sur Φ faible, on posera :

Définition 1.2 : On appelle $a(\Phi)$ le plus petit sous-espace réticulé de $\mathscr{C}(\Phi)$ contenant les fonctions affines continues sur Φ faible.

On appelle $b(\Phi)$ le sous-espace de $a(\Phi)$ constitué par les fonctions bornées ■

Définition 1.3 : On appelle mesure *affine* sur Φ faible toute forme *linéaire positive* sur $b(\Phi)$.

L'ensemble des mesures affines sur Φ faible sera noté $M(\Phi)$. C'est un cône convexe.

Remarque 1.1 : La définition 1.1 est empruntée à L. SCHWARTZ [52]. Les définitions 1.2 et 1.3 sont dues à G. CHOQUET [16].

Remarque 1.2 : Si nous munissons $b^*(\Phi)$ de la topologie faible $\sigma(b^*(\Phi)\ ,\ b(\Phi))$ qui en fait un espace complet, alors $M(\Phi)$ est un sous-espace fermé de $b^*(\Phi)$, (cf. [16]).

1.2 - Image d'une mesure affine.

Soient Φ et Ψ deux espaces vectoriels topologiques, et soit u une application affine continue de Φ faible dans Ψ faible.

Pour toute $\mu \in M(\Phi)$, la forme linéaire $g \to \mu(g \circ u)$ sur $b(\Psi)$ est une mesure affine sur Ψ, notée $u(\mu)$ et appelée *l'image* de μ par u.

Une propriété importante est la suivante (cf. [16]) : Si μ et ν sont deux mesures affines sur Φ, telles que $\varphi_*(\mu) = \varphi_*(\nu)$, pour tout $\varphi_* \in \Phi'$, alors $\mu = \nu$.

Soit maintenant $u \in \mathscr{L}(\Phi\ ;\ \Psi)$ (avec les topologies initiales sur Φ et Ψ). C'est aussi une application continue de Φ faible dans Ψ faible. Soit $\mu \in M(\Phi)$, on peut donc définir $u(\mu)$.

Il est intéressant de chercher quelle est la mesure affine sur R associée par $u(\mu)$ a un élément $\psi_* \in \Psi'$. Si $g \in b(\mathrm{R})$ nous avons

$$\psi_* [u(\mu)](g) = u(\mu)(g \circ \psi_*) = \mu(g \circ \psi_* \circ u). \qquad (1.1)$$

Or

$$\psi_* \circ u = u^* \psi_* \in \Phi', \qquad (1.2)$$

---

(1) si Z est un Banach $\| z \|_z$ ou $\| z \|$ désigne la norme d'un élément z de Z.

(2) ■ signifie la fin d'une démonstration, définition, remarque, etc.

où u^* est l'application $\in \mathscr{L}(\Psi' ; \Phi')$ duale de u. Donc

l'image $u(\mu)$ sur Ψ de la mesure affine μ sur Φ associe à tout élément ϕ_* de Ψ' la même mesure affine sur R que celle associée par μ à l'élément $u^* \phi_*$ de Φ'. } *(1.3)*

1.3 - **Mesures cylindriques.**

Soit Φ un espace vectoriel topologique. On posera

Définition 1.4 : Une mesure cylindrique sur Φ est une mesure affine μ sur Φ faible, telle que l'image $g(\mu)$ par toute application $g \in \mathscr{L}(\Phi ; R^n)$, n quelconque, est une mesure de Radon sur R^n ■

Nous supposons maintenant que Φ est un espace de Hilbert [1], et soit μ une mesure cylindrique sur Φ [2]. Nous désignons par J_Φ l'isomorphisme canonique de Φ dans Φ'. L'espace Φ' est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\| \varphi_* \|_{\Phi'} = \| J_\Phi^{-1} \varphi_* \|_\Phi . \qquad (1.4)$$

Nous allons maintenant définir deux notions importantes :

Espérance Mathématique

Soit $\varphi_* \in \Phi'$. $\varphi_*(\mu)$ est une mesure de Radon sur R. Nous supposons que $\varphi_*(\mu)$ possède un moment du premier ordre. Posons

$$E\,\varphi_* = \int_R x\, d\,[\,\varphi_*(\mu)\,](x) . \qquad (1.5)$$

L'application $\varphi_* \to E\,\varphi_*$ est linéaire mais en général *non continue.* Dans le cas où cette application est continue, il existe un élément m et un seul de Φ tel que

$$E\,\varphi_* = < m, \varphi_* > [3] = \big((m, J_\Phi^{-1} \varphi_*) \big)_\Phi [4] . \qquad (1.6)$$

Définition 1.5 : l'élément m de Φ vérifiant (1.6), s'il existe, est appelé espérance mathématique de la mesure cylindrique μ. On le notera $E(\mu)$.

Opérateur de Covariance :

Soient φ_{1*} , $\varphi_{2*} \in \Phi'$. Soit u l'application appartenant à $\mathscr{L}(\Phi ; R^2)$ définie par

$$\varphi \xrightarrow{u} [\, < \varphi_{1*} , \varphi > , < \varphi_{2*} , \varphi > \,] . \qquad (1.7)$$

Alors, $u(\mu)$ est une mesure de Radon sur R^2 : $E\,\varphi_{1*}$ et $E\,\varphi_{2*}$ peuvent être définis également par

$$E\,\varphi_{1*} = \int_R x_1\, d\,[\,u(\mu)\,](x_1 , x_2) \qquad (1.8)$$

$$E\,\varphi_{2*} = \int_R x_2\, d\,[\,u(\mu)\,](x_1 , x_2) , \qquad (1.9)$$

en supposant, bien entendu, que ces quantités existent.

On peut aussi considérer la matrice de Covariance de $u(\mu)$, si elle existe, c'est-à-dire

$$\Gamma\,\varphi_{i*} , \varphi_{j*} = \int_{R^2} x_1 x_2\, d\,[\,u(\mu)\,](x_1 , x_2) - E\,\varphi_{i*}\, E\,\varphi_{j*} \; ; \; i , j = 1, 2. \qquad (1.10)$$

L'application φ_{i*} , $\varphi_{j*} \to \Gamma\,\varphi_{i*}$, φ_{j*} est une application *bilinéaire* de $\Phi' \to R$. En

---

(1) on pourrait prendre, pour ce numéro, un Banach reflexif. Cependant, pour les applications que nous avons en vue, un Hilbert suffira.

(2) Rappelons que les mesures cylindriques sont positives ou nulles.

(3) $< , >$ désigne la dualité Φ , Φ'.

(4) $\big((,) \big)_\Phi$ où s'il n'y a pas de confusion possible $\big((,) \big)$ désigne le produit scalaire dans Φ. Il nous arrivera également d'utiliser la notation $(,)$.

général cette application n'est pas bicontinue. Dans le cas où elle est bicontinue, il existe un opérateur et un seul $\Lambda \in \mathscr{L}(\Phi' ; \Phi)$ vérifiant

$$< \Lambda \varphi_{i*} , \varphi_{j*} > = \Gamma \varphi_{i*} , \varphi_{j*} . \qquad (1.11)$$

Définition 1.6 : L'opérateur $\Lambda \in \mathscr{L}(\Phi' ; \Phi)$ vérifiant (1.11) est appelé Opérateur de Covariance de la mesure cylindrique μ. On le notera Cov (μ).

Remarque 1.3 : Un Opérateur de Covariance vérifie

$$< \Lambda \varphi_* , \varphi_* > \geqslant 0 \ \forall \varphi_* \in \Phi' \qquad (1.12)$$

$$< \Lambda \varphi_{1*} , \varphi_{2*} > = < \Lambda \varphi_{2*} , \varphi_{1*} > \forall \varphi_{1*} , \varphi_{2*} \in \Phi' . \qquad (1.13)$$

2 - Interprétation Probabiliste.

2.1 - Définitions.

Soit $\underline{\omega}$ un espace topologique muni d'une mesure de Radon ν, positive de masse 1 (i. e., $\nu(1) = 1$). Nous dirons que $\underline{\omega}$ est *l'espace d'épreuves* et que ν est une loi de probabilité sur $\underline{\omega}$. Soit Φ un espace de Hilbert *séparable.*

Définition 2.1 : On appelle *pré-variable aléatoire* à valeur dans Φ une application $\chi : \underline{\omega} \to \Phi$ ν mesurable au sens de Lusin [1] ■

Alors $\chi(\nu)$ est une loi de probabilité sur Φ.

Deux pré-variables aléatoires sont équivalentes si elles sont égales presque partout. Une classe d'équivalence est une *variable aléatoire.* [3]

On dit que deux variables aléatoires $\chi : [\ \underline{\omega} , \nu\ ] \to \Phi$ et $\chi' : [\ \underline{\omega'} , \nu'\ ] \to \Phi$ sont *isonomes* si $\chi(\nu) = \chi'(\nu')$, autrement dit, si elles définissent sur Φ la même loi de probabilité. Soit T un ensemble quelconque.

Définition 2.2 : On appelle fonction aléatoire définie sur T, à valeur dans Φ, une application χ_t qui a tout élément t de T, associe une variable aléatoire à valeur dans Φ. Si T est un espace vectoriel, χ_t est linéaire si $\chi_{t_1 + t_2} = \chi_{t_1} + \chi_{t_2}$.

2.2 - Propriétés Fondamentales (L. SCHWARTZ [52]).

L'Interprétation probabiliste des mesures cylindriques est alors possible grâce au Théorème suivant [2] dû à L. SCHWARTZ et que nous énonçons :

Il y a correspondance bijective entre les mesures cylindriques sur Φ et les fonctions aléatoires linéaires réelles sur Φ à une isonomie près :

Autrement dit, si μ est une mesure cylindrique sur Φ, il existe un espace d'épreuves $\underline{\omega}$, ν et une fonction aléatoire $\chi_{\varphi*}(\omega)$ $\omega \in \underline{\omega}$, $\varphi_* \in \Phi'$ réelle et linéaire en φ_* , telle que la loi de probabilité de la variable aléatoire $\chi_{\varphi*}$ soit *identique* à la mesure de Radon $\varphi_*(\mu)$ sur R' i. e., $\chi_{\varphi*}(\nu) = \varphi(\mu)$. De plus nous avons l'équivalence suivante :

la mesure cylindrique μ sur Φ est une mesure de Radon sur Φ si et seulement si l'application $\varphi_* \to \chi_{\varphi*}(\omega)$ est p. s. continue sur Φ', (2.1)

---

(1) c'est-à-dire que $\forall \delta > 0 \ \exists \ \underline{\omega}_\delta$ *compact* continu dans $\underline{\omega}$, tel que $\nu(\underline{\omega} - \underline{\omega}_\delta) \leqslant \delta$ et la restriction de χ à $\underline{\omega}_\delta$ est continue.

(2) Le théorème est vrai pour Φ espace de Hansdorff localement convexe mais nous l'utilisons seulement pour un Hilbert séparable.

(3) L'ensemble des V. A. est noté Mes $(\underline{\omega} , \nu ; \Phi)$

soit aussi (puisque Φ est séparable) :

La mesure cylindrique μ sur Φ est une mesure de Radon sur Φ si et seulement si il existe une application v mesurable $\chi(\omega)$ de $\underline{\omega}$ à valeur dans Φ telle que

$$\chi_{\varphi *}(\omega) = < \chi(\omega) , \varphi_* > p.s. , \forall \varphi_* \in \Phi' . \qquad (2.2)$$

Les quantités $E\ \varphi_*$ et $\Gamma\ \varphi_{1*}$, φ_{2*} définies en (1.5) et (1.10) s'interprètent alors tout naturellement comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle $\chi_{\varphi *}$ et et la covariance des variables aléatoires réelles $\chi_{\varphi 1*}$, $\chi_{\varphi 2*}$.

2.3 - Exemple important.

Soit $[0, \theta]$ un intervalle, et soit $\chi(t, \omega)$ une fonction aléatoire réelle, i. e., une application de $[0, \theta] \to \text{Mes}\ [\underline{\omega} , v ; R]$.

Si δ désigne la mesure de Radon sur $[0, \theta] \times \underline{\omega}$, produit de la mesure de Lebesgue sur $[0 , \theta]$ par la mesure de Radon v sur $\underline{\omega}$, nous supposons que $\chi(t, \omega)$ est une application δ-mesurable à valeurs réelles, et que pour presque tout ω fixé, l'application $t \to \chi(t, \omega)$ appartient à $L^2(0, \theta)$. Dans ces conditions l'application $\omega \to \chi(. , \omega)$ est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Hilbert $\Phi \equiv L^2(0, \theta)$. En identifiant Φ et son dual, on définit alors une fonction aléatoire linéaire sur Φ, grâce à la formule (2.2), soit

$$\chi_\varphi(\omega) = \int_0^\theta \chi(t, \omega)\, \varphi(t)\, dt. \qquad (2.3)$$

2.4 - Transformation par une application linéaire et continue.

Soient Φ et Ψ deux espaces de Hilbert séparables et $u \in \mathcal{L}(\Phi ; \Psi)$. Sur Φ on suppose définie une mesure cylindrique μ possédant une espérance mathématique $E(\mu) = m$ et un opérateur de covariance $\text{Cov}(\mu) = \Lambda$. Considérons la mesure cylindrique image $u(\mu)$ sur Ψ. Soient ψ_{1*} et $\psi_{2*} \in \Psi'$. Comme pour (1.3), on peut voir que $u(\mu)$ associe au couple (ψ_{1*} , ψ_{2*}) la même mesure de Radon sur R^2 que celle associée par μ au couple $(u^* \psi_{1*} , u^* \psi_{2*})$. Par conséquent, on a

$$E\ \psi_{1*} = < m , u^* \psi_{1*} > = < u\, m , \psi_{1*} > \qquad (2.4)$$

et

$$\Gamma\ \psi_{1*} , \psi_{2*} = < \Lambda\ u^* \psi_{1*} , u^* \psi_{2*} > = < u\, \Lambda\, u^* \psi_{1*} , \psi_{2*} > . \qquad (2.5)$$

Il en résulte que $u(\mu)$ possède une espérance mathématique $E[u(\mu)] = u\, m$ et un opérateur de covariance $\text{Cov}[u(\mu)] = u\, \Lambda\, u^*$.

3 - Mesure cylindrique de Gauss.

3.1 - *Définition.*

Nous identifions Φ et son dual. Nous appelerons mesure cylindrique de Gauss γ sur Φ, la mesure cylindrique qui associe à tout système $\varphi_1 , \varphi_2 \ldots \varphi_n$ de vecteurs de Φ la mesure de Radon sur R^n définie par

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} x' A^{-1} x}\, dx_1 \ldots dx_n$$

où A est la matrice $\in \mathcal{L}(R^n ; R^n)$ définie par

$$A_{ij} = (\varphi_i , \varphi_j) , \qquad (3.1)$$

x désigne le vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ et x' le transposé de x.

Il est clair que γ est une mesure cylindrique d'espérance mathématique 0 et d'Opérateur de Covariance I. Si $\chi_\varphi(\omega)$ désigne la fonction aléatoire sur Φ attachée à γ, et si $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_n$ désigne une base orthonormée de Φ, alors les variables aléatoires χ_{φ_i} sont des variables normales centrées réduites et indépendantes entre elles. Plus généralement on posera

Définition 3.1 : On appelle mesure cylindrique de Gauss d'Espérance mathématique m et d'Opérateur de Covariance Λ la mesure cylindrique qui associe à tout système $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ de vecteurs de Φ la mesure de Radon sur R^n définie par

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m_n)'\,\Lambda_n^{-1}(x-m_n)}\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (3.2)$$

où m_n et Λ_n sont le vecteur de R^n et la matrice $\in \mathscr{L}(\mathrm{R}^n ; \mathrm{R}^n)$ définis par

$$m_n = \begin{bmatrix} (m\ ,\ \varphi_1) \\ . \\ . \\ (m\ ,\ \varphi_n) \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

$$(\Lambda_n)_{ij} = (\Lambda\ \varphi_i\ ,\ \varphi_j)\ ;\ i, j = 1 \ldots n\ . \qquad (3.4)$$

3.2 - **Recherche d'une loi de probabilité sur Φ.**

Si Λ est un opérateur positif et autoadjoint, il existe un opérateur $\Lambda^{1/2} \in \mathscr{L}(\Phi\ ;\ \Phi)$ positif et autoadjoint tel que

$$(\Lambda\ \varphi\ ,\ \varphi) = |\Lambda^{1/2}\ \varphi|^2\ . \qquad (3.5)$$

Soit u l'application affine continue de Φ dans Φ définie par

$$u\ \varphi = m + \Lambda^{1/2}\ \varphi\ , \qquad (3.6)$$

nous avons alors

Proposition 3.1 : La mesure cylindrique de Gauss sur Φ, d'espérance mathématique m et d'Opérateur de Covariance Λ, coïncide avec la mesure image sur Φ, par l'application u (3.6), de la mesure cylindrique de Gauss γ (d'Espérance mathématique 0 et d'Opérateur de Covariance I) sur Φ.

Démonstration : C'est une conséquence du numéro 2.3. L'application $\Lambda^{1/2}$ transforme γ en une mesure cylindrique de Gauss d'Espérance mathématique 0 et d'Opérateur de Covariance Λ (il suffit de passer à la mesure de Radon sur R^n associée à tout système $\varphi_1\ ,\ \varphi_2 \ldots \varphi_n$). La translation définie par m change simplement l'espérance mathématique ■

L'Intérêt de la proposition 3.1 est qu'elle va nous fournir un critère pour décider si une mesure cylindrique de Gauss (m, Λ) sur Φ est ou non une mesure de Radon sur Φ. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de Minlos (cf. [52]) que nous énonçons :

Si E et F sont deux Hilberts et $u \in \mathscr{L}(E; F)$, si γ est la mesure cylindrique de Gauss (0, I) sur E, la condition nécessaire et suffisante pour que $u\,\gamma$ sur F soit une mesure de Radon est que u soit un opérateur de Hilbert Schmidt [1].

Par conséquent nous avons

Corollaire 3.1 : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure cylindrique de Gauss sur Φ, d'espérance mathématique m et d'Opérateur de Covariance Λ soit une mesure de Radon est que Λ soit *nucléaire* [2].

Nous poserons

Définition 3.2 : La mesure cylindrique de Gauss (m, Λ) est appelée, dans le cas où Λ est nucléaire, *Loi de probabilité de Gauss.*

Remarque 3.1 : D'après (2.2) la loi de probabilité de Gauss est la loi de probabilité d'une variable aléatoire $\chi(\omega)$ à valeur dans Φ.

§ 2 : Estimation au sens de Bayes.

4 - Notion d'estimateur bayésien.

4.1 - Quelques définitions.

4.1.1. - Espace des paramètres.

Soit U un espace de Hilbert, appelé espace des paramètres u. Sur U nous nous donnons une loi de probabilité μ, concentrée sur le sous ensemble U_0 de U défini par

$$U_0 = \{ u \mid |u - u_0|_U \leqslant M \} ; u_0 \text{ donné dans U} ; M > 0 \qquad (4.1)$$

$$\mu(U_0) = 1. \qquad (4.2)$$

On dira que μ est la loi de probabilité à priori du paramètre.

Remarque 4.1 : La loi de probabilité à priori traduit l'état de l'information possédée sur le paramètre, avant toute « observation ». Dans le cas, assez fréquent où $U = R^n$ on pourra, si on ne possède aucune information à priori, prendre une loi uniforme, sans inconvénient mathématique puisque u est *p. s.* borné.

4.1.2 - Espace des observations.

Nous introduisons un second espace de Hilbert séparable K, appelé *espace des observations.* Soit $\underline{\omega}$ un espace d'épreuves muni d'une loi de probabilité m. Soit ρ la loi de probabilité sur $\underline{\omega} \times U$ produit de m et μ, soit

$$d\rho = dm \times d\mu. \qquad (4.3)$$

Nous considérons sur K une fonction aléatoire $Y_k(\omega\ ,\ u)$, linéaire et réelle, soit

$$\left.\begin{array}{l} k \to Y_k(\omega\ ;\ u) \\ K \to \text{Mes}\{ \underline{\omega} \times U\ ;\ d\rho\ ;\ R \}. \end{array}\right\} \qquad (4.4)$$

---

(1) Soit A un opérateur compact d'un Hilbert H_1 dans un Hilbert H_2, on sait (cf. [24]) qu'il s'écrit sous la forme

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, e_n) h_n$$

où $\{ e_n \}$ et $\{ h_n \}$ sont des ensembles orthonormés dans H_1 et H_2 et $\lambda_n > 0$.

Par définition, A est un opérateur de Hilbert Schmidt si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ converge.

(2) L'opérateur A défini en (1) est dit nucléaire si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ converge.

Nous distinguerons alors deux cas :

1^er cas : L'application (4.4) est continue. Alors on a

$$Y_k(\omega ; u) = \left(Y(\omega ; u), k\right)_K \quad \rho \text{ p. s. } ; \forall k \in K. \tag{4.5}$$

On peut alors associer à la variable aléatoire $Y(\omega ; u)$ une loi de probabilité σ sur K.

2^e cas : L'application (4.4) est non continue. On peut alors associer à la fonction aléatoire linéaire $Y_k(\omega ; u)$ une mesure cylindrique sur K, que nous noterons également σ, mais qui ne se réduit pas à une mesure de Radon sur K.

Dans les deux cas, nous ferons l'hypothèse

pour u fixé, $Y_k(. ; u)$ est une fonction aléatoire linéaire réelle de $K \to \text{Mes}\left[\underline{\omega} ; dm ; R\right]$, à laquelle correspond une mesure cylindrique de Gauss g_u sur K d'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et d'opérateur de covariance $\Lambda(u)$. (4.6)

et l'hypothèse

$$\left.\begin{array}{l} u \to \overline{Y}(u) \text{ est } \mu\text{-mesurable} \\ u \to \Lambda(u)\, k \text{ est } \mu\text{-mesurable, } \forall k \in K. \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

Si nous sommes dans le premier cas, alors $\Lambda(u)$ vérifie la propriété

P : $\Lambda(u)$ est un opérateur nucléaire, μ-p. s.

Nous allons traiter l'estimation dans le premier cas, tout d'abord. Nous reviendrons ensuite au second cas, au numéro 6.

4.2 - Etude du 1^er cas : Définition de l'estimateur bayésien.

On introduit l'espace de Hilbert

$$L^2(\underline{\omega} \times U, d\rho ; U) = \left\{ \begin{array}{l} \text{espace des variables aléatoires définies sur} \\ \underline{\omega} \times U, \text{ à valeur dans U, dont le carré de} \\ \text{la norme est } \rho\text{-sommable.} \end{array} \right\} \tag{4.8}$$

Pour abréger, on convient de désigner également l'espace (4.8) par la notation $L^2_U(\rho)$. On introduit ensuite

$$L^2(K, d\sigma ; U) = \left\{ \begin{array}{l} \text{espace des variables aléatoires définies} \\ \text{sur K à valeur dans U, dont le carré de la} \\ \text{norme est } \sigma\text{-sommable.} \end{array} \right\} \tag{4.9}$$

On conviendra également de noter l'espace (4.9) par $L^2_U(\sigma)$. A l'aide de l'application Y de $\underline{\omega} \times U \to K$, on définit une application $v \to \tilde{v}$ de $L^2(K, d\sigma ; U) \to L^2(\underline{\omega} \times U, d\rho ; U)$ par :

$$\tilde{v}(\omega ; u) = v\left(Y(\omega ; u)\right). \tag{4.10}$$

Comme $d\sigma$ est l'image de $d\rho$ par Y, on a :

$$\int_K \| v(k) \|^2_U \, d\sigma(k) = \int_{\underline{\omega} \times U} \| \tilde{v}\left(Y(\omega ; u)\right) \|^2_U \, dm(\omega)\, d\mu(u) \tag{4.11}$$

et donc $v \to \tilde{v}$ est une isométrie. Donc l'image $\check{L}^2(K, d\sigma ; U)$ de $L^2(K, d\sigma ; U)$ est un sous espace de Hilbert de $L^2(\underline{\omega} \times U, d\rho ; U)$. L'espace $L^2_U(\sigma)$ sera appelé *espace des estimateurs.* Désignons par χ_0 l'élément de $L^2_U(\rho)$ défini par

$$\chi_0(\omega ; u) \equiv u. \tag{4.12}$$

Projetons χ_0 sur $\check{L}^2(K, d\sigma ; U)$. On obtient ainsi un élément unique de $\check{L}^2(K, d\sigma ; U)$, auquel correspond, par l'inverse de $v \to \tilde{v}$, un élément de $L^2(K, d\sigma ; U)$, que l'on notera $\hat{u}(Y)$. On posera

Définition 4.1 : L'élément $\hat{u}$ (Y) sera appelé *Estimateur de Bayes* du paramètre u [(1)].

L'élément $\hat{u}$ (Y) vérifie, par définition de la projection

$$\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} \left(u , v\left(Y(\omega ; u)\right)\right)_U dm(\omega) = \tag{4.13}$$
$$\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} \left(\hat{u}\left(Y(\omega ; u)\right) , v\left(Y(\omega ; u)\right)\right)_U dm(\omega).$$

L'équation (4.13) peut encore s'écrire, par définition de σ

$$\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} \left(u , v\left(Y(\omega ; u)\right)\right)_U dm(\omega) = \int_K \left(\hat{u}(k) , v(k)\right)_U d\sigma(k) . \tag{4.14}$$

Orientation : Dans le premier cas, il est donc possible de définir l'estimateur bayésien $\hat{u}$ (Y) de u. Le problème consiste maintenant à définir un algorithme de calcul de $\hat{u}$ (Y). C'est l'objet du n° 5.

Remarque 4.2 : Il existe des fonctions aléatoires $Y_k(\omega ; u)$ pour lesquelles (4.6) et (4.7) sont vérifiées. Nous en verrons de nombreux exemples au Chapitre II. On peut s'en convaincre aisément de la manière suivante. Pour u fixé, il correspond à un n-tuple $\mathcal{N} = (k_1 , k_2 , \ldots k_n)$ une probabilité $g_{u,\mathcal{N}}$ sur $\check{R}^n$ et une projection de $\check{R}^K$ sur $\check{R}^n = \check{R}_{\mathcal{N}}$. Les probabilités $g_{u,\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ variable, forment un système projectif et par conséquent définissent une probabilité m_u sur $\check{R}^K$ ($\check{R}$ désigne le compactifié de Cech de R, cf. [52]). On pose alors $\underline{\omega} = (\check{R}^K)^U$ et on munit $\underline{\omega}$ de la loi de probabilité $m = \underset{U}{\pi} m_u$. Un élément ω de $\underline{\omega}$ est de la forme $\omega = \omega_u(k)$, $u \in U$, $k \in K$. Pour u et k fixés, on pose alors

$$Y_k(\omega ; u) = \omega_u(k) .$$

Si $\check{f}$ désigne l'application identique de $(\check{R}^K)^U \to (\check{R}^K)^U$, on a

$$\omega_u(k) = \pi_k \circ \pi_u \circ \check{f}(\omega).$$

On a par construction $\pi_u \circ \check{f}(m) = m_u$ et

$\pi_k \circ \pi_u \circ \check{f}(m) = g_{u,k}$, donc $\omega_u(k)$ prend ses valeurs p. s. dans R. On peut aussi montrer comme dans L. SCHWARTZ (cf. [51] , [52]) que pour u fixé $k \to Y_k(\omega ; u)$ est une application linéaire.

5 - Algorithme d'approximation de l'Estimateur Bayésien.

5.1 - Description générales de l'Algorithme.

5.1.1 - Hypothèses - Notations.

Les fonctions $\overline{Y}(u)$ et $\Lambda(u)$ définies en (4.6) étant souvent données de façon implicite, comme nous le verrons dans les applications à l'identification des systèmes (cf. Chapitre II), nous allons supposer qu'il est possible d'en définir des approximations.

Soit ξ un indice appartenant à un espace d'indices de dimension finie. Nous supposons données des suites $\overline{Y}_\xi(u)$ et $\Lambda_\xi(u)$ (appartenant respectivement à K et à $\mathcal{L}(K ; K)$) telles que

$$\left(\overline{Y}_\xi(u) , \varphi\right)_K \underset{\xi \to 0}{\to} \left(\overline{Y}(u) , \varphi\right)_K \quad \forall \varphi \in K ; \text{ p. s. } u. \tag{5.1}$$

$$\left(\Lambda_\xi(u)\varphi , \psi\right)_K \underset{\xi \to 0}{\to} \left(\Lambda(u)\varphi , \psi\right)_K \quad \forall \varphi , \psi \in K ; \text{ p. s. } u. \tag{5.2}$$

Nous nous donnons maintenant une famille K_h de sous espaces vectoriels fermés de K, dépendant d'un paramètre h appartenant à un second espace d'indices de dimension

(1) terminologie usuelle lorsqu'on introduit des lois de probabilité à priori, pour les paramètres inconnues.

finie. Nous supposons que les K_h sont de dimension *finie*, N (h). Soit P_h le projecteur sur K_h. Nous supposons que l'on a

$$P_h y \underset{h \to 0}{\to} y \text{ fortement dans K; } \forall\, y \in K. \tag{5.3}$$

Soit e_h^j , $j = 1 \ldots N(h)$ une base de K_h . Nous avons

$$P_h y = \sum_{j=1}^{N(h)} y_h^j\, e_h^j \tag{5.4}$$

avec

$$y_h^j = (y\ ,\ e_h^j)\quad j = 1 \ldots N.(h)\ . \tag{5.5}$$

L'application

$$y \to [\,(y\ ,\ e_h^1)\ ,\ \ldots\ ,\ (y\ ,\ e_h^{N(h)})\,] \tag{5.6}$$

est linéaire et continue de K dans $R^{N(h)}$. Nous désignons cette application par τ_h , soit :

$$\tau_h y = [\,(y\ ,\ e_h^1)\ ,\ \ldots\ ,\ (y\ ,\ e_h^{N(h)})\,]\ . \tag{5.7}$$

Nous introduisons enfin la famille de matrices $\Lambda_{h\xi}(u)$ définies par :

$$[\,\Lambda_{h\xi}(u)\,]_{ij} = (\Lambda_\xi(u)\, e_h^i\ ,\ e_h^j)\quad i, j = 1 \ldots N(h)\ . \tag{5.8}$$

Nous faisons l'hypothèse

$$\Lambda_{h\xi}(u) \text{ est définie positive et symétrique, } \forall\, h\ ,\ \xi\ ;\ \text{p. s. } u. \tag{5.9}$$

5.1.2 - Estimateur de Bayes approché.

Nous introduisons la variable aléatoire $Y_{h\xi}(\omega\ ;\ u)$ définie sur $\underline{\omega} \times U$ à valeurs dans $R^{N(h)}$, dont la loi de probabilité est définie de la façon suivante :

pour u fixé la variable aléatoire $Y_{h\xi}(.\,;u)$ suit une loi de probabilité de Gauss dans $R^{N(h)}$, dont l'espérance mathématique est $\tau_h\, \overline{Y}_\xi(u)$ et dont la matrice de covariance est $\Lambda_{h\xi}(u)$. } (5.10)

On appelle *observation approchée* la variable aléatoire $Y_{h\xi} = Y_{h\xi}(\omega\ ;\ u)$. Il est possible d'expliciter la loi de $Y_{h\xi}$. Pour u fixé, $Y_{h\xi}(.\ ;\ u)$ suit une loi de probabilité dont la densité est donnée par :

$$f_{h\xi}^u(x_h) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))'\ \Lambda_{h\xi}^{-1}(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))}}{(2\pi)^{\frac{N(h)}{2}}\ \sqrt{|\,\Lambda_{h\xi}(u)\,|}} \quad (1) \tag{5.11}$$

La loi de $Y_{h\xi}$ s'en déduit par intégration de la formule (5.11) par rapport à la mesure μ; soit, si $\sigma_{h\xi}$ désigne la loi de probabilité de $Y_{h\xi}$, on a :

$$\frac{d\,\sigma_{h\xi}(x_h)}{d\,x_h} = \int_U \frac{d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))'\ \Lambda_{h\xi}^{-1}(u)(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))}}{(2\pi)^{\frac{N(h)}{2}}\ \sqrt{|\,\Lambda_{h\xi}(u)\,|}}\ . \tag{5.12}$$

Soit maintenant $L_U^2(\sigma_{h\xi})$ le sous espace fermé de $L_U^2(\rho)$ des variables aléatoires définies sur $R^{N(h)}$ à valeur dans U et dont le carré de la norme est $\sigma_{h\xi}$-sommable.

---

(1) $|\,A\,|$ où A est une matrice, désigne le déterminant de A.

Désignons par $\hat{u}_{h\xi}(x_h)$ $(x_h \in R^{N(h)})$ la projection de χ_0 défini en (4.12) sur $L^2_U(\sigma_{h\xi})$; $\hat{u}_{h\xi}(x_h)$ vérifie une équation analogue à (4.14) soit :

$$\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} \left(u , v_h(Y_{h\xi}(\omega ; u))\right)_U d m(\omega) = \int_{R^{N(h)}} \left(\hat{u}_{h\xi}(x_h) , v_h(x_h)\right) d\sigma_{h\xi}(x_h) \quad (5.13)$$

$\forall\, v_h \in L^2_U(\sigma_{h\xi})$;

Et utilisant (5.12), il vient

$$\int_U d\mu(u) \int_{R^{N(h)}} \frac{\left(u , v_h(x_h)\right)_U \; e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)' \Lambda^{-1}_{h\xi}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)}}{(2\pi)^{\frac{N(h)}{2}} \sqrt{|\Lambda_{h\xi}(u)|}} =$$

$$\int_U d\mu(u) \int_{R^{N(h)}} \frac{\left(\hat{u}_{h\xi}(x_h) , v_h(x_h)\right) e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)' \Lambda^{-1}_{h\xi}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)}}{(2\pi)^{\frac{N(h)}{2}} \sqrt{|\Lambda_{h\xi}(u)|}}$$

$\forall\, v_h(x_h) \in L^2_U(\sigma_{h\xi})$. (5.14)

L'équation (5.14) se résout immédiatement. Nous obtenons

$$\hat{u}_{h\xi}(x_h) = \frac{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\, u\, e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)' \Lambda^{-1}_{h\xi}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{h\xi}(u)|}}}{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\; e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)' \Lambda^{-1}_{h\xi}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{h\xi}(u)|}}} \quad (5.15)$$

$\hat{u}_{h\xi}(x_h)$ est une application continue de $R^{N(h)}$ dans U. On posera

Définition 5.1 : On appelle *Estimateur de Bayes approché* la variable aléatoire

$\hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y) \equiv \hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y(\omega ; u))$ ■

Nous allons maintenant étudier le problème de la convergence de l'estimateur de Bayes approché vers l'estimateur de Bayes vrai.

5.2 - **Convergence de l'algorithme.**

Théorème 5.1 :

Hypothèses et Notations de 5.1.1 La suite $\hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y)$ est une suite d'estimateurs qui vérifie

$$\lim_{h \to 0} \lim_{\xi \to 0} \hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y) = \hat{u}(Y) \text{ dans } L^2_U(\sigma)$$

Démonstration

a) $\underline{\hat{u}_{h\xi}\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right) \in L^2_U(\sigma)}$.

L'application de K dans U définie par

$z \to \hat{u}_{h\xi}(\tau_h z)$ (5.16)

est continue, dans σ-mesurable. Montrons que l'on a

$|\hat{u}_{h\xi}(\tau_h z) - u_0|_U < M \qquad \forall\, z$; (5.17)

En effet, nous avons

$|u - u_0|_U < M \qquad$ p. s. μ , (5.18)

et

$$\hat{u}_{h\xi}(x_h) - u_0 = \frac{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\,(u-u_0)\; e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)\Lambda_{h\xi}^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{h\xi}(u)|}}}{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\; e^{\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)'\Lambda_{h\xi}^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{h\xi}(u)|}}} \qquad (5.19)$$

donc

$$|\hat{u}_{h\xi}(x_h) - u_0| < M \qquad \forall\, x_h\,, \qquad (5.20)$$

ce qui implique (5.17).

La norme de $\hat{u}_{h\xi}(\tau_h z)$ étant partout bornée, son carré est intégrale par rapport à la loi de probabilité σ, ce qui entraîne a).

b) $\lim_{h\to 0}\ \lim_{\xi\to 0}\ \hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y) = \hat{u}(Y)$ dans $L^2_U(\rho)$.

Nous allons montrer que

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour } h \text{ fixé } \hat{u}_{h\xi}\left(\tau_h Y(\omega\,;u)\right) \to \tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega\,;u)\right)\\ \text{lorsque } \xi \to 0, \text{ fortement dans } L^2_U(\rho).\end{array}\right\} \qquad (5.22)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega\,;u)\right) \to \hat{u}\left(Y(\omega\,;u)\right) \text{ lorsque } h \to 0\\ \text{fortement dans } L^2_U(\rho).\end{array}\right\} \qquad (5.23)$$

c) *Démonstration de (5.22).*

D'après l'hypothèse (5.1) $\overline{Y}_\xi(u) \to \overline{Y}(u)$ faiblement dans K, p. s. u lorsque $\xi \to 0$. Il en résulte que

$$\tau_h \overline{Y}_\xi(u) \underset{\xi\to 0}{\to} \tau_h \overline{Y}(u) \text{ dans } R^{N(h)}\,, \text{ p. s. } u. \qquad (5.24)$$

Par ailleurs d'après (5.2) on a

$$\left(\Lambda_\xi(u)\, e_h^i\,,\, e_h^j\right) \underset{\xi\to 0}{\to} \left(\Lambda(u)\, e_h^i\,,\, e_h^j\right) \;\forall\, i,j = 1 \ldots N(h) \text{ p. s. } u. \qquad (5.25)$$

Par conséquent, si on définit la matrice $\Lambda_h(u)$ par

$$\left(\Lambda_h(u)\right)_{ij} = \left(\Lambda(u)\, e_h^i\,,\, e_h^j\right)_K\,, \qquad (5.26)$$

chacun des termes de la matrice $\Lambda_{h\xi}(u)$ converge, p. s. u, vers le terme correspondant de la matrice $\Lambda_h(u)$, lorsque $\xi \to 0$.

Il résulte alors de (5.25) et (5.26) que l'on a

$$\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right)'\Lambda_{h\xi}^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}_\xi(u)\right) \to \left(x_h - \tau_h \overline{Y}(u)\right)'\Lambda_h^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}(u)\right)$$
lorsque $\xi \to 0$, $\forall\, x_h \in R^{N(h)}$, p. s. u. (5.29)

Donc si on pose

$$\tilde{u}_h(x_h) = \frac{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\, u\, e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}(u)\right)'\Lambda_h^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_h(u)|}}}{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\; e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \overline{Y}(u)\right)'\Lambda_h^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \overline{Y}(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_h(u)|}}}\,, \qquad (5.30)$$

on a

$$\hat{u}_{h\xi}(x_h) \to \tilde{u}_h(x_h) \text{ lorsque } \xi \to 0 \text{ , fortement dans U , } \forall\, x_h \in R^{N(h)} , \tag{5.31}$$

ce qui entraîne que

$$\hat{u}_{h\xi}\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right) \underset{\xi \to 0}{\to} \tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right) \qquad \rho\text{-p. s.} \tag{5.32}$$

Or $\tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right)$ est borné ρ p. s., et la suite $\hat{u}_{h\xi}\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right)$ reste lorsque $\xi \to 0$, uniformément p. s. bornée. Ceci, joint à (5.32) implique (5.22).

d) *Démonstration de (5.23).*

Posons

$$Y_h(\omega ; u) = \tau_h Y(\omega ; u) , \tag{5.33}$$

et soit σ_h la loi de probabilité de Y_h. Pour u fixé, $Y_h(. ; u)$ suit une loi de probabilité de Gauss sur $R^{N(h)}$, d'espérance mathématique $\tau_h \bar{Y}(u)$ et de matrice de covariance $\Lambda_h(u)$.

Par conséquent la densité de probabilité $\dfrac{d\,\sigma_h(x_h)}{d\,x_h}$ est donnée par :

$$\frac{d\,\sigma_h(x_h)}{d\,x_h} = \int_U \frac{d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \bar{Y}(u)\right)' \Lambda_h^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \bar{Y}(u)\right)}}{(2\,\pi)^{\frac{N(h)}{2}} \sqrt{|\Lambda_h(u)|}} . \tag{5.34}$$

Soit $v_h(x_h) \in L^2_U(\sigma_h)$. Nous avons, en utilisant (5.30) et (5.34)

$$\int_{R^{N(h)}} \left(\tilde{u}_h(x_h) , v_h(x_h)\right)_U d\,\sigma_h(x_h) = \tag{5.35}$$

$$\int_{R^{N(h)}} dx_h \int_U \frac{d\,\mu(u)\left(u , v_h(x_h)\right)_U e^{-\frac{1}{2}\left(x_h - \tau_h \bar{Y}(u)\right)' \Lambda_h^{-1}(u)\left(x_h - \tau_h \bar{Y}(u)\right)}}{(2\,\pi)^{\frac{N(h)}{2}} \sqrt{|\Lambda_h(u)|}}$$

soit

$$\int_{R^{N(h)}} \left(\tilde{u}_h(x_h) , v_h(x_h)\right)_U d\,\sigma_h(x_h) = \int_U d\,\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\left(u , v_h\left(Y_h(\omega ; u)\right)\right)_U$$

$$\forall\, v_h(x_h) \in L^2_U(\sigma_h) . \tag{5.36}$$

L'équation (5.36) montre que $\tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right)$ est la projection de $\chi_0 \equiv u$ sur $L^2_U(\sigma_h)$, sous espace fermé de $L^2_U(\rho)$.

L'équation (5.36) s'écrit aussi

$$\int_U d\,\mu(u) \int_{\underline{\omega}} d\,m(\omega)\left(\tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right) , v_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right)\right)_U$$

$$= \int_U d\,\mu(u) \int_{\underline{\omega}} d\,m(\omega)\left(u , v_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right)\right) ; \tag{5.40}$$

$\tilde{u}_h\left(\tau_h Y(\omega ; u)\right)$, étant la projection de l'élément fixe u, demeure dans un borné de $L^2_U(\rho)$. Soit $\tilde{u}_{h_n}\left(\tau_{h_n} Y(\omega ; u)\right)$ une sous suite extraite faiblement convergente dans

$L^2_U(\rho)$ vers un élément de la forme $u^*\ (Y(\omega\ ;\ u))$ (car la suite $\tilde{u}_h\ (\tau_h\ Y(\omega\ ;\ u))$ appartient à $L^2_U(\sigma)$ qui est fermé dans $L^2_U(\rho)$).

Soit w une fonction définie sur K à valeur dans U, continue et bornée. On choisit dans (5.40)

$$v_h\ (\tau_h\ Y(\omega\ ;\ u)) = w\ (P_h\ Y(\omega\ ;\ u)). \tag{5.41}$$

D'après l'hypothèse (5.3), on a

$$w\ (P_h\ Y(\omega\ ;\ u)) \to w\ (Y(\omega\ ;\ u)) \text{ lorsque } h \to 0\ ,\ \forall\ \omega\ ,\ u, \tag{5.42}$$

La convergence a lieu également dans $L^2_U(\rho)$. Nous pouvons alors passer à la limite dans (5.40). Il vient

$$\begin{aligned}&\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\ (u^*\ (Y(\omega\ ;\ u)),\ w\ (Y(\omega\ ;\ u)))_U \\ &= \int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\ (u\ ,\ w\ (Y(\omega\ ;\ u)))\ .\end{aligned} \tag{5.43}$$

L'ensemble des fonctions continues et bornées étant dense dans $L^2_U(\sigma)$, (5.43) a lieu pour $w(Y) \in L^2_U(\sigma)$ quelconque.

En comparant avec (4.13), on voit que

$$u^*\ (Y(\omega\ ;\ u)) = \hat{u}\ (Y(\omega\ ;\ u))\ . \tag{5.44}$$

En raison de l'unicité de la limite $\hat{u}(Y)$, toute la suite $\tilde{u}_h\ (\tau_h\ Y)$ converge faiblement vers $\hat{u}(Y)$ dans $L^2_U(\rho)$. En fait, $\tilde{u}_h\ (\tau_h\ Y)$ converge fortement vers $\hat{u}(Y)$.

En effet (5.43) montre que

$$\begin{aligned}&\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\ |\tilde{u}_h\ (\tau_h\ Y(\omega\ ;\ u))|^2_U \\ &= \int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\ (u\ ,\ \tilde{u}_h\ (\tau_h\ Y(\omega\ ;\ u)))_U\ .\end{aligned} \tag{5.45}$$

Le membre de droite de (5.45) converge vers $\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\ (u\ ,\ \hat{u}\ (Y(\omega\ ;\ u)))_U$, c'est-à-dire vers $\int_U d\mu(u) \int_{\underline{\omega}} dm(\omega)\ |\hat{u}\ (Y(\omega\ ;\ u))|^2_U$.

Ceci, joint à la convergence faible assure la convergence forte, ce qui démontre (5.23).

6 - Estimation Bayésienne pour des observations de type « bruit blanc ».

6.1 - Définition du problème. Hypothèses - Notations.

Nous reprenons les notations de 4.1.2. Nous supposons ici que la fonction aléatoire Y_k linéaire réelle définie sur l'espace K des observations ne peut se mettre sous la forme (4.5), autrement dit que la propriété P n'a pas lieu. Dans ce cas, d'après la réciproque du théorème de Minlos (cf. [52]), les mesures cylindriques de Gauss g_u définies en (4.6) *ne sont pas* des lois de probabilité de Gauss sur K. Nous supposons que $Y_k\ (\omega\ ;\ u)$ possède la forme suivante :

$$Y_k(\omega\ ;\ u) = (k\ ,\ \overline{Y}(u)) + \eta_k(\omega)\ ; \tag{6.1}$$

$\eta_k(\omega)$ étant une fonction aléatoire réelle linéaire sur K (l'espace des épreuves étant $\underline{\omega}$, m) à laquelle est associée une mesure cylindrique de Gauss sur K, d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance Λ vérifiant la propriété :

P' : Λ est inversible.

Il est clair que les mesures cylindriques de Gauss g_u sur K, ont, comme espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et comme opérateur de covariance Λ (indépendant de u). On posera

Définition 6.1 : Une mesure cylindrique sur un espace de Hilbert Φ (ou une fonction aléatoire réelle linéaire sur Φ') est dite du type « *bruit blanc* », lorsqu'elle possède une espérance mathématique et un opérateur de covariance $\Lambda \in \mathscr{L}(\Phi' ; \Phi)$ vérifiant

$$< \Lambda \varphi , \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|_{\Phi}^{2}, \text{ (1)} ; \qquad (6.2)$$

Λ est dit *cœrcif.*

Définition 6.2 : On appellera « bruit blanc » une mesure cylindrique de type « bruit blanc » sur Φ telle que

$$\Lambda = \sigma^2 \, J_{\Phi}^{-1}, \qquad (6.3)$$

σ^2 étant une constante réelle appelée *variance du bruit blanc* ■

Nous renvoyons à la remarque 6.1 pour ce qui concerne l'adéquation des définitions 6.1 et 6.2 avec celles que donnent les Ingénieurs.

Dans le cas où l'espace de Hilbert est identifié à son dual (c'est le cas de l'espace des observations K) les propriétés (6.2) et P' sont équivalents, et J_{Φ} est l'identité I.

Les mesures cylindriques de Gauss g_u sur K dont donc du type « bruit blanc ». Il est alors impossible de définir l'estimateur de Bayes du paramètre u, comme nous l'avons fait au n° 4.2.

Cependant, pour tout h , ξ , la variable aléatoire $Y_{h\xi}(\omega ; u)$ définie en (5.10) possède un sens. Il en est de même de la formule (5.15) donnant $\hat{u}_{h\xi}(x_h)$.

La définition 5.1 de l'estimateur de Bayes approché conserve un sens puisque l'application $Y_d \to \hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y_d)$ est continue de K dans V. Bien entendu, il n'y a pas de loi de probabilité sur K et l'estimateur de Bayes approché ne peut donc s'interpréter comme un élément de l'espace $L_U^2(\rho)$.

Comme $\Lambda_{h\xi}(u) = \Lambda_h$ est indépendant de u, la formule donnant l'estimateur de Bayes se simplifie, soit :

$$\hat{u}_{h\xi}(\tau_h Y_d) = \frac{\int_U d\mu(u)\, u\, e^{-\frac{1}{2}(\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))' \Lambda_h^{-1} (\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))}}{\int_U d\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}(\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))' \Lambda_h^{-1} (\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}_\xi(u))}} \qquad (6.2)$$

Orientation : Le problème qui se pose maintenant est d'étudier la stabilité et la convergence des formules (6.2) donnant l'estimateur de Bayes approché, lorsque h , $\xi \to 0$ et pour Y_d *fixé* quelconque dans K. C'est l'objet du n° 6.2.

Remarque 6.1 : Sur la définition du Bruit blanc.

Nous opérons ici de manière tout à fait *formelle*, et en particulier nous manipulons les distributions comme des fonctions. Soit t le temps $\in [0 , T]$. Les Ingénieurs et Physiciens appellent « Bruit blanc » une fonction aléatoire réelle χ_t, d'espérance mathématique 0 (par exemple) et dont la fonction de corrélation définie par

$$\Gamma(t_1 , t_2) = E\{ \chi_{t_1} \chi_{t_2} \} , \qquad (6.3)$$

est donnée *formellement* par :

$$\Gamma(t_1 , t_2) = \delta(t_1 - t_2) , \qquad (6.4)$$

où δ est la distribution de Dirac. Une façon classique de définir *correctement* la notion de bruit blanc, est d'utiliser la théorie des intégrales stochastiques (cf. ITO [27] , DOOB [17] , DYNKIN [19]). On utilise pour cela la notion de « processus à accroissements orthogonaux » i. e., on se donne une fonction aléatoire $Y_t \equiv Y(t , \omega)$ vérifiant

$$E\{ | Y_t - Y_s |^2 \} < \infty \text{ et } E\{ (Y_{t_2} - Y_{s_2})(Y_{t_1} - Y_{s_1}) \} = 0 ,$$

(1) La norme sur Φ' est définie en 1.4.

$\forall\, t, s$, et $s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \in [\,0, T\,]$. Si $\varphi(t) \in L^2(0, T)$, on montre alors qu'on peut définir une variable aléatoire réelle χ_φ, représentée par le *symbole*

$$\chi_\varphi(\omega) = \int_0^T \varphi(t)\, d\, Y(t, \omega) \tag{6.5}$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &E\,\chi_\varphi = 0\ ;\ \forall\, \varphi \in L^2(0, T) \\ &E\,\chi_{\varphi_1}\,\chi_{\varphi_2} = \int_0^T \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\, d\, F(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

où $F(t)$ est la fonction monotone non décroissante définie de manière unique par

$E\{|Y_t - Y_s|^2\} = F(t) - F(s)\ ,\ s < t.$

On dit alors que l'on a un Bruit blanc, si $F(t) \equiv t$. Or, si on se donne sur $L^2(0, T)$, une mesure cylindrique d'espérance mathématique O et d'opérateur de covariance I, la fonction aléatoire linéaire associée définie sur $L^2(0, T)$, coïncide, comme on le voit aisément avec (6.5).

Les définitions 6.1 et 6.2 constituent donc des définitions rigoureuses des « Bruits blancs » introduits par les Ingénieurs. Elles sont plus générales que celles fournies par la théorie des intégrales stochastiques [1].

6.2 - Convergence des estimateurs de Bayes approchés.

Théorème 6.1 : Hypothèses et Notations de 6.1. Pour Y_d fixé dans K, la suite $\hat{u}_{h\xi}(\tau_h\, Y_d)$ définie en (6.2) vérifie

$$\lim_{\xi \to 0}\ \lim_{h \to 0} \hat{u}_{h\xi}(\tau_h\, Y_d) = \hat{u}(Y_d) = \frac{\int_U d\,\mu(u)\, u\, e^{-\frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}(Y_d - \overline{Y}(u))\,,\, Y_d - \overline{Y}(u)\right)_K}}{\int_U d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}(Y_d - \overline{Y}(u))\,,\, Y_d - \overline{Y}(u)\right)_K}}$$

fortement dans U ■ *(6.7)*

Pour démontrer le théorème 6.1, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 6.1 : Soit $\varphi \in K$ et ψ défini par

$$\psi = \Lambda^{-1/2}\,\varphi\ . \tag{6.8}$$

Alors, on a l'égalité

$$(\tau_h\,\varphi)'\,\Lambda_h^{-1}\,\tau_h\,\varphi = \|\,\check{P}_h\,\psi\,\|_K^2\ , \tag{6.9}$$

où $\check{P}_h$ désigne le projecteur sur le sous espace de K engendré par les vecteurs $\Lambda^{1/2}\, e_h^1, \ldots, \Lambda^{1/2}\, e_h^{N(h)}$.

Démonstration :

Les vecteurs $\Lambda^{1/2}\, e_h^j, j = 1 \ldots N(h)$ sont bien linéairement indépendants, puisque les e_h^j sont orthonormés et que Λ est inversible (donc aussi $\Lambda^{1/2}$). Soient $\chi_h^i, i = 1 \ldots N(h)$, un système orthonormé construit à partir des $\Lambda^{1/2}\, e_h^j$. Nous avons

$$\Lambda^{1/2}\, e_h^l = \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_{lj}\, \chi_h^j \tag{6.10}$$

soit

$$(\Lambda^{1/2}\, e_h^l\,,\, \Lambda^{1/2}\, e_h^l) = \tag{6.11}$$

$$\sum_{j,\,k=1}^{N(h)} \alpha_{lj}\,\alpha_{lk}\,(\chi_h^j\,,\,\chi_h^k) = \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_{lj}\,\alpha_{lj}\ .$$

---

(1) Il y a encore une possibilité de définition, qui est celle des processus distributions (cf. GELFAND et VILENKIN [24], cf. aussi [43]).

Si nous désignons par A la matrice α_{ij}, nous déduisons de (6.11)

$$\Lambda_h = A\, A^* , \tag{6.12}$$

A est une matrice inversible puisque les $\Lambda^{1/2}\, e_h^i$ sont linéairement indépendants. De (6.10) nous déduisons :

$$(\Lambda^{1/2}\, e_h^i , \psi)_K = \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_{ij}\, (\psi , \chi_h^j)_K , \tag{6.13}$$

soit d'après (6.8)

$$\tau_h\, \varphi = A \begin{bmatrix} \cdots \\ (\psi , \chi_h^i) \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

Donc

$$\| \check{P}_h\, \psi \|_K^2 = \sum_{i=1}^{N(h)} (\psi , \chi_h^i)_K^2 =$$

$$(A^{-1}\, \tau_h\, \varphi)'\, A^{-1}\, \tau_h\, \varphi = (\tau_h\, \varphi)'\, A^{-1^*}\, A^{-1}\, \tau_h\, \varphi . \tag{6.15}$$

Or de (6.12) on déduit $A^{-1^*} A^{-1} = \Lambda_h^{-1}$ ce qui achève la démonstration du lemme 6.1.

Lemme 6.2 : La suite $\check{P}_h\, \varphi \to \varphi$ fortement dans K lorsque $h \to 0$.

Démonstration : $\check{P}_h \varphi$ reste borné en norme lorsque $h \to 0$ (puisque $\check{P}_h$ est une projection). Soit une sous suite $\check{P}_{h_n}\, \varphi$ extraite et convergeant faiblement vers un élément w de K. Soit ψ quelconque dans K, nous avons

$$(\check{P}_{h_n}\, \varphi , \Lambda^{1/2}\, P_{h_n}\, \psi) = (\varphi , \Lambda^{1/2}\, P_{h_n}\, \psi) . \tag{6.16}$$

On rappelle que P_h désigne le projecteur sur le sous espace engendré par les e_h^i; $\Lambda^{1/2}\, P_{h_n}\, \psi$ appartient au sous espace engendré par les vecteurs $\Lambda^{1/2}\, e_{h_n}^i$ et (6.16) exprime simplement que $\check{P}_{h_n}$ est le projecteur sur ce sous espace. Or $P_h\, \psi \to \psi$ lorsque $h \to 0$ fortement dans K (hypothèse (5.3)). On peut alors passer à la limite dans (6.16) et il vient

$$(w , \Lambda^{1/2}\, \psi) = (\varphi , \Lambda^{1/2}\, \psi) \quad \forall\, \psi \in K , \tag{6.17}$$

ce qui implique, puisque $\Lambda^{1/2}$ est inversible que $w = \varphi$. Comme toute sous suite extraite converge vers la même limite φ, on a :

toute la suite $\check{P}_h\, \varphi$ converge faiblement vers φ . (6.18)

On a aussi

$$(\check{P}_h\, \varphi , \check{P}_h\, \varphi)_K = (\varphi , \check{P}_h\, \varphi) , \tag{6.19}$$

donc

$$\| \check{P}_h\, \varphi \|_K^2 \to \| \varphi \|_K^2 \text{ lorsque } h \to 0 , \tag{6.20}$$

ce qui, joint à la convergence faible, achève la démonstration du lemme 6.2.

Démonstration du théorème 6.1.

Pour h fixé, nous avons d'après l'hypothèse (5.1),

$$\hat{u}_{h\xi}\, (\tau_h\, Y_d) \underset{\xi \to 0}{\to} \tilde{u}_h\, (\tau_h\, Y_d) \text{ fortement dans U ; } \forall\, Y_d \in K \tag{6.21}$$

où

$$\tilde{u}_h\, (\tau_h\, Y_d) = \frac{\int_U d\ \mu\ (u)\ u\ e^{-\frac{1}{2}\left(\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}\,(u)\right)' \Lambda_h^{-1} \left(\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}\,(u)\right)}}{\int_U d\ \mu\ (u)\ e^{-\frac{1}{2}\left(\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}\,(u)\right)' \Lambda_h^{-1} \left(\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}\,(u)\right)}} . \tag{6.22}$$

Posons

$$Y_d - \overline{Y}(u) = \Lambda^{1/2} z(u) . \qquad (6.23)$$

D'après le lemme 6.1, nous avons $(\tau_h Y_d - \tau_h \check{Y}(u))' \Lambda_h^{-1} (\tau_h Y_d - \tau_h \overline{Y}(u)) = \| \check{P}_h z(u) \|^2$ et d'après le lemme 6.2 $\| \check{P}_h z(u) \|^2 \underset{h \to 0}{\to} \| z(u) \|^2$.

De sorte que

$$\tilde{u}_h (\tau_h Y_d) \underset{h \to 0}{\to} \hat{u}(Y_d) \text{ fortement dans U , } \forall\, Y_d \in K. \qquad (6.24)$$

6.3 - Estimateur Bayésien et maximum de vraisemblance.

Le théorème de convergence 6.1 nous amène à poser, dans le cas d'une observation de type Bruit blanc la

Définition 6.3 : Dans le cas d'une observation de type Bruit blanc, on appelle Estimateur de Bayes du paramètre u, la fonction $\hat{u}(Y_d)$ définie en (6.7) ■

On observe que $\hat{u}(Y_d)$ n'est autre que l'espérance mathématique de la variable aléatoire u par rapport à une loi de probabilité sur U , μ_{Y_d} qui possède une *densité* par rapport à la loi de probabilité μ à priori sur U, donnée par

$$\frac{d\,\mu_{Y_d}(u)}{d\,\mu(u)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}(Y_d - \overline{Y}(u)),\, Y_d - \overline{Y}(u)\right)_K}}{\int_U d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}(Y_d - \overline{Y}(u)),\, Y_d - \overline{Y}(u)\right)_K}} \qquad (6.26)$$

On posera

Définition 6.4 : On appelle μ_{Y_d} , loi de probabilité *à posteriori* du paramètre u, sur le vu de l'observation Y_d ■

On posera

Définition 6.5 : On appelle Estimateur du maximum de vraisemblance une fonctionnelle $\hat{u}(Y_d)$ (si elle existe) qui *maximise* la densité de la loi de probabilité μ_{Y_d} à posteriori ■

L'estimateur du maximum de vraisemblance coïncide avec l'élement (s'il existe) $\hat{u}$ qui *minimise* la fonctionnelle J (u) définie par

$$J(u) = \left(\Lambda^{-1}(Y_d - \overline{Y}(u)),\, Y_d - \overline{Y}(u)\right)_K . \qquad (6.27)$$

Remarque 6.2 : L'estimateur du maximum de vraisemblance, coïncide dans le cas étudié (mesures cylindriques de *Gauss*) avec l'estimateur des moindres carrés, que nous définirons et étudierons au n° 7.

Remarque 6.3 : L'estimateur du maximum de vraisemblance sera d'autant plus difficile à obtenir que la fonction $\overline{Y}(u)$ est *complexe*. Par contre l'estimateur de Bayes est, lui, toujours défini. De plus l'estimateur de Bayes permet de tenir compte de renseignements disponibles à priori sur le paramètre à estimer.

6.4 - Cas particulier du « Bruit blanc ».

Nous supposons que l'observation est non seulement du type Bruit blanc, mais que c'est plus précisément un Bruit blanc de variance σ^2 (cf. Définition 6.2). La densité de la loi de probabilité à postériori du paramètre u (définie par (6.26)) est alors fournie par :

$$\frac{d\,\mu_{Y_d}(u)}{d\,\mu(u)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\| Y_d - \overline{Y}(u) \|_K^2}}{\int_U d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\| Y_d - \overline{Y}(u) \|_K^2}} . \qquad (6.28)$$

Nous allons faire tendre σ vers 0 (l'intérêt est que $\sigma = 0$ signifie que « l'erreur de mesure » $\eta_k(\omega)$ intervenant en (6.1) est *nulle*).

Nous notons $u_\epsilon^{Y_d}$ la suite de variables aléatoires à valeur dans U de lois de probabilité $\mu_\epsilon^{Y_d}$ dont la densité par rapport à μ est fournie par la formule

$$\frac{d\,\mu_\epsilon^{Y_d}(u)}{d\,\mu(u)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\,\epsilon^2}\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K^2}}{\int_U d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2\,\epsilon^2}\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K^2}} \,. \tag{6.29}$$

Nous supposons que

$\overline{Y}(u)$ demeure dans un borné de K, lorsque u varie dans U_0 (1) (6.30)

$$\mu\{\,u \mid \overline{Y}(u) = Y_d\,\} > 0\,. \tag{6.31}$$

Nous nous intéressons à la suite de variables aléatoires à valeur dans K, $\overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})$.

Proposition 6.1 : Sous les hypothèses (6.30) et (6.31) la suite de variables aléatoires $\overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})$ converge en moyenne quadratique (2) vers la variable certaine Y_d, lorsque $\epsilon \to 0$, $\forall\, Y_d \in K$.

Démonstration :

Montrons d'abord que la suite de variables aléatoires réelles $\|\,Y_d - \overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})\,\|_K$ converge en probabilité vers 0. Autrement dit que

$$\text{Prob}\,\{\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})\,\|_K > \alpha\,\} \to 0 \text{ lorsque } \epsilon \to 0\,,\ \forall\,\alpha > 0. \tag{6.32}$$

Nous avons

$$p = \text{Prob}\,\{\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})\,\|_K > \alpha\,\} = \int_{\{\,u \mid \|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K > \alpha\,\}} d\,\mu_\epsilon^{Y_d}(u)\,, \tag{6.33}$$

soit

$$p = \frac{\int_{\{\,u \mid \|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K > \alpha\,\}} d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2\,\epsilon^2}\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K^2}}{\int_U d\,\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2\,\epsilon^2}\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K^2}} \,. \tag{6.34}$$

Le dénominateur de l'expression de p reste supérieur à

$$\int_{\{\,u \mid \|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K = 0\,\}} d\,\mu(u) = \mu\{\,u \mid \overline{Y}(u) = Y_d\,\} > 0 \text{ d'après (6.31).} \tag{6.35}$$

Il suffit donc de montrer que le numérateur tend vers 0.

Or si u est tel que

$$\|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K > \alpha\,, \tag{6.36}$$

nous avons

$$e^{-\frac{1}{2\,\epsilon^2}\,\|\,Y_d - \overline{Y}(u)\,\|_K^2} < e^{-\frac{\alpha^2}{2\,\epsilon^2}}\,. \tag{6.37}$$

Le numérateur de p reste donc inférieur à $e^{-\frac{\alpha^2}{2\,\epsilon^2}}$, quantité qui tend vers 0 avec ϵ, ce qui prouve (6.32).

---

(1) Ce qui ne pose pas de problèmes pour les applications.

(2) Pour la convergence des variables aléatoires, cf. par exemple [44].

Par ailleurs

$$E\{\| Y_d - \overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})\|_K^2\} = \int_{\{u \mid \| Y_d - \overline{Y}(u)\|_K^2 \geqslant \alpha\}} d\mu_\epsilon^{Y_d}(u) \| Y_d - \overline{Y}(u)\|_K^2$$

$$+ \int_{\{u \mid \| Y_d - \overline{Y}(u)\|^2 < \alpha\}} d\mu_\epsilon^{Y_d}(u) \| Y_d - \overline{Y}(u)\|_K^2 \ ; \qquad (6.38)$$

$\forall\, \alpha$, δ donnés > 0, on peut trouver grâce à (6.32) un nombre $\epsilon_0(\alpha, \delta)$ tel que pour $\epsilon < \epsilon_0(\alpha, \delta)$ on ait

$$E\{\| Y_d - \overline{Y}(u_\epsilon^{Y_d})\|_K^2\} \leqslant M\delta + \alpha\,, \qquad (6.39)$$

où M désigne la borne supérieure de $\| Y_d - \overline{Y}(u)\|^2$, ce qui démontre la proposition.

Remarque 6.4 : La proposition 6.1 implique, selon les définitions habituelles de l'approximation stochastique (cf. [40]), que $u_\epsilon^{Y_d}$ est une approximation consistante d'une solution de l'équation

$$Y_d = \overline{Y}(u)\,. \qquad (6.40)$$

Remarque 6.5 : La nécessité de l'hypothèse (6.31) s'explique par le fait que les lois de probabilité $\mu_\epsilon^{Y_d}$ sont absolument continues par rapport à la loi de probabilité μ. Par conséquent si l'ensemble des solutions de (6.40) est de μ-mesure nulle, il demeure de $\mu_\epsilon^{Y_d}$-mesure nulle, $\forall\, \epsilon$. En d'autres termes la donnée de Y_d ne conduit pas à un progrès dans la connaissance des solutions de (6.40).

6.5 - Interprétation de la loi de probabilité à postériori.

Nous allons dans ce numéro interpréter la loi de probabilité à postériori définie en (6.26). Désignons par g_0 la mesure cylindrique de Gauss associée à la fonction aléatoire linéaire $\eta_k(\omega)$ (définie en (6.1)).

On peut alors construire une fonction aléatoire linéaire $\zeta_k(\tilde{\omega})$ de $K \to \mathrm{Mes}\,|\,\underline{\tilde{\omega}}\,;\, g_0\,;\, R\,|$, où $\underline{\tilde{\omega}}$ est un nouvel espace d'épreuves contenant K, tel que g_0 soit une mesure de Radon sur $\underline{\tilde{\omega}}$, et vérifiant: $\eta_k(\omega)$ et $\zeta_k(\tilde{\omega})$ sont deux fonctions aléatoires isonomes. Pour cela, on pose

$$\underline{\tilde{\omega}} = \underset{F}{\pi} \left(K/_F \right)^{\nu}$$

le produit étant pris pour tous les sous espaces vectoriels F de K, fermés et de codimension finie. On sait alors (cf. [52]) que g_0 est bien une mesure de Radon sur $\underline{\tilde{\omega}}$, et qu'il existe une injection canonique de K dans $\underline{\tilde{\omega}}$. Définissons maintenant $\zeta_k(\tilde{\omega})$. Soit $k \in K$, posons $F_k = k^\perp$ et désignons par j_k la surjection canonique de K dans K/F_k. Comme $K = K'$, k définit également une application linéaire et continue de K dans R. On a alors le diagramme

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{ccc} K & \overset{j_k}{\rightarrow} & K/F_k \\ & {\scriptstyle k}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \dot{k}} & \\ & R & \end{array}$$

et on peut associer à $\dot{k}$, une application $\dot{k}^\nu$ de $(K/F_k)^\nu$ dans R^ν, telle qu'on ait le diagramme

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{ccc} K/F_k & \overset{\dot{k}}{\rightarrow} & R \\ {\scriptstyle i_k}\downarrow & \overset{\dot{k}^\nu}{\rightarrow} & \downarrow {\scriptstyle i_R} \\ (K/F_k)^\nu & & R^\nu \end{array}$$

où i_k et i_R désignent les injections canoniques respectives de K/F_k dans $(K/F_k)^\nu$ et de R dans R^ν. On pose alors

$$\zeta_k(\tilde{\omega}) = \dot{k}^\nu \circ \pi_k \circ \check{f}(\tilde{\omega}) \qquad (6.41)$$

où $\check{f}$ désigne l'identité de $\underset{F}{\pi}(K/F)^v \to \underset{F}{\pi}(K/F)^v$, et π_k désigne la projection sur $(K/F_k)^v$.

Comme $\pi_k \circ \check{f}(g_0)$ est concentré sur K/F_k, il est clair d'après le diagramme II, que $\zeta_k(\tilde{\omega})$ est p. s. à valeurs dans R. D'après les diagrammes I et II, et en utilisant le fait que $\eta_k(m) = g_{0,K/F_k}$ (équivalence des définitions des mesures cylindriques cf. [52]) on voit que $\zeta_k(\tilde{\omega})$ est isonome à $\eta_k(\omega)$.

Comme g_0 est une mesure cylindrique de Gauss. $\zeta_k(\tilde{\omega})$ est une fonction aléatoire gaussienne sur K, centrée et dont la fonction de covariance $\Gamma(k_1, k_2) = E\{\zeta_{k_1}(\tilde{\omega})\zeta_{k_2}(\tilde{\omega})\}$ est donnée par

$$\Gamma(k_1, k_2) = (\Lambda k_1, k_2). \tag{6.42}$$

Si maintenant nous munissons $\underline{\tilde{\omega}}$ de la mesure de Radon g_u (et non plus g_0), alors $\zeta_k(\tilde{\omega})$ devient une fonction aléatoire gaussienne sur K, non centrée, de même fonction de covariance $\Gamma(k_1, k_2)$, et de moyenne

$$m(k) = (\overline{Y}(u), k). \tag{6.43}$$

D'après le théorème d'équivalence des processus gaussiens (cf. J. NEVEU [43]), il en résulte que g_0 et g_u sont ou bien étrangères ou bien équivalentes, et que la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient équivalentes est que $m(k)$ appartienne à l'espace autoreproduisant $\mathscr{H}(K;\Gamma)$ associé à Γ. Pour construire $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}(K;\Gamma)$, on considère le sous espace vectoriel de $L^2(\tilde{\omega}; g_0; R)$ des variables aléatoires $\zeta_k(\tilde{\omega})$, pour $k \in K$, et soit $\tilde{\mathscr{H}}$ sa fermeture dans $L^2(\tilde{\omega}; g_0; R)$. Si $\xi \in \tilde{\mathscr{H}}$, on pose

$$u(\xi)(k) = E[\xi \zeta_k]. \tag{6.44}$$

L'application $\xi \to u(\xi)$ est alors injective (puisque les ζ_k engendrent $\tilde{\mathscr{H}}$). Soit alors $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions réelles définies sur K, par la formule (6.44), pour ξ variant dans $\tilde{\mathscr{H}}$. On munit $\mathscr{H}$ du produit scalaire

$$(f, g)_{\mathscr{H}} = (u^{-1}(f), u^{-1}(g))_{L^2(\tilde{\omega}; g_0; R)} \tag{6.45}$$

L'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ ainsi défini s'appelle espace autoreproduisant associé à Γ.

Nous allons voir maintenant que la condition d'équivalence de g_0 et g_u est respectée. En effet posons

$$k_1 = \Lambda^{-1}\overline{Y}(u) \tag{6.46}$$

on a alors

$$(\overline{Y}(u), k) = (\Lambda k_1, k) = E(\zeta_{k_1}\zeta_k) \tag{6.47}$$

ce qui implique que

$$m(k) = u(\zeta_{k_1})(k) \tag{6.48}$$

donc $m(k)$ appartient à $\mathscr{H}$. Comme g_u et g_0 sont équivalentes on a alors (cf. NEVEU [43])

$$\frac{dg_u}{dg_0} = \exp\left[\zeta_{k_1}(\tilde{\omega}) - \tfrac{1}{2}(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u))\right]. \tag{6.49}$$

Considérons maintenant l'espace $(\underline{\tilde{\omega}}, g_u)$ et supposons que, ne connaissant pas u, nous voulons l'estimer en réalisant une épreuve $\tilde{\omega} \in \underline{\tilde{\omega}}$. Un estimateur bayésien est alors une application $\hat{V} : \underline{\tilde{\omega}} \to U$, mesurable qui rende minimum le critère

$$J(v) = \int_U \int_{\underline{\tilde{\omega}}} |v(\tilde{\omega}) - u|_U^2 \, d\, g_u(\tilde{\omega})\, d\, \mu(u) \tag{6.50}$$

parmi toutes les applications $v : \underline{\tilde{\omega}} \to U$, pour lesquelles (6.50) a un sens [1]. Il est aisé

(1) On munit $U \times \underline{\tilde{\omega}}$ de la probabilité $d\rho = d\, g_u \otimes d\, \mu$, alors v doit appartenir au sous espace fermé de $L^2(U \times \underline{\tilde{\omega}}; d\rho; R)$, des fonctions p. s. indépendantes de u.

de voir que grâce à (6.49), $\hat{v}$ existe et est défini par

$$\hat{v}(\tilde{\omega}) = \frac{\int_U d\mu(u)\, u \exp\left[\zeta_{k_1}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u)\right)\right]}{\int_U d\mu(u) \exp\left[\zeta_{k_1}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u)\right)\right]} \tag{6.51}$$

ce qui n'est autre que l'espérance mathématique de u par rapport à la loi de probabilité *à postériori* (dépendant de l'observation $\tilde{\omega}$)

$$\frac{d\mu_{\tilde{\omega}}(u)}{d\mu(u)} = \frac{\exp\left[\zeta_{k_1}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u)\right)\right]}{\int_U d\mu(u) \exp\left[\zeta_{k_1}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u)\right)\right]} \tag{6.52}$$

Si maintenant, on se restreint aux observations $\tilde{\omega} = Y_d \in K$ (rappelons que $\underline{\tilde{\omega}} \supset K$), alors d'après (6.41), on a

$$\zeta_{k_1}(Y_d) = (k_1, Y_d) = \left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), Y_d\right)$$

et

$$\frac{d\mu_{Y_d}(u)}{d\mu(u)} = \frac{\exp\left[\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), Y_d\right) - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u)\right)\right]}{\int_U d\mu(u) \exp\left[\left(\Lambda^{-1}Y(u), Y_d\right) - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\overline{Y}(u), \overline{Y}(u)\right)\right]} \tag{6.53}$$

ce qui coïncide avec la formule (6.26).

Résumons les résultats obtenus dans la

Proposition 6.2 : Les lois de probabilités g_u et g_0 sur $\underline{\tilde{\omega}}$ sont équivalentes. Si on applique la théorie de l'estimation bayésienne du paramètre u, au cas où l'observation est $\tilde{\omega} \in \underline{\tilde{\omega}}$, on obtient une densité de loi de probabilité à postériori définie par (6.52) et la formule (6.26) s'interprète alors comme la restriction à $K \subset \tilde{\omega}$, de la formule (6.52).

Remarque 6.6 : En dimension finie il n'y a qu'un seul espace d'observations à considérer, soit K_h. La densité de loi de probabilité à postériori est alors (déduite de (6.2))

$$\frac{d\mu_{k_h}(u)}{d\mu(u)} = \frac{\exp\left[\left(\tau_h \overline{Y}_\ell(u)\right)' \Lambda_h^{-1} k_h - \frac{1}{2}\left(\tau_h \overline{Y}_\ell(u)\right)' \Lambda_h^{-1}\left(\tau_h \overline{Y}_\ell(u)\right)\right]}{\int_U d\mu(u) \exp\left[\left(\tau_h \overline{Y}_\ell(u)\right)' \Lambda_h^{-1} k_h - \frac{1}{2}\left(\tau_h \overline{Y}_\ell(u)\right)' \Lambda_h^{-1}\left(\tau_h \overline{Y}_\ell(u)\right)\right]} \tag{6.54}$$

et le théorème 6.1 revient en fait à dire que pour $k_h = \tau_h Y_d$, alors les densités discrètes (6.54) convergent vers les densités (6.53), $\forall\ u$ fixé $\in U$.

§ 3 - Estimation au sens des moindres carrés.

7 - Modèle n° 1 : Le paramètre à estimer est « déterministe ».

7.1 - Hypothèses - Notations - Le problème.

L'espace des paramètres U est un espace topologique quelconque pour le moment. On ne suppose définie sur U aucune loi de probabilité à priori [1].

L'espace K des observations est un espace de Hilbert séparable. K′ désigne le dual de K [2], et J_K désigne l'isomorphisme canonique de K dans K′. On suppose, définie sur K′ une famille de fonctions aléatoires réelles linéaires $Y_{\varphi'}(\omega\ ;\ u)$ indicée par u (l'espace des épreuves est $\underline{\omega}$ et $\varphi \in K'$) de la forme

$$Y_\varphi(\omega\ ;\ u) = <\varphi, \overline{Y}(u)> + \eta_\varphi(\omega), \quad \varphi \in K', \tag{7.1}$$

où $\overline{Y}(u)$ est une application donnée de $U \to K$ et $\eta_\varphi(\omega)$ (erreur de mesure) est une fonction aléatoire réelle linéaire sur K′ à laquelle correspond une mesure cylindrique de type Bruit blanc sur K d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance $\Lambda \in \mathscr{L}(K'\ ;\ K)$ satisfaisant à (6.2).

---

(1) contrairement à la théorie Bayésienne du § 2.

(2) on n'identifie pas forcément K et son dual.

L'opérateur Λ possède un inverse $\Lambda^{-1} \in \mathscr{L}(K\ ;\ K')$.

On se donne un sous ensemble $\mathscr{U}_{ad}$ de U et on pose

Définition 7.1 : Soit Y_d donné dans K, on dit que l'on estime le paramètre u au sens des moindres carrés si on cherche un élément $\hat{u}\ (Y_d)$ (éventuel) qui minimise le critère

$$J(u) = < \Lambda^{-1} \left(Y_d - \overline{Y}(u)\right), Y_d - \overline{Y}(u) > . \qquad (7.2)$$

7.2 - **Motivation du critère des moindres carrés.**

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ une base orthonormée de K'. Considérons, pour n fixé, la famille (indicée par u) de variables aléatoires de R^n, soit $Y_{\varphi_i}(.\ ;\ u)$, $i = 1, \ldots n$. Désignons par $Y_n(u)$ ce vecteur aléatoire à n dimensions (qui dépend du paramètre inconnu u). L'espérance mathématique de $Y_n(u)$ est $m_n(u)$, définie par

$$m_n(u) = \begin{bmatrix} < \varphi_1 , \overline{Y}(u) > \\ \cdots \\ < \varphi_n , \overline{Y}(u) > \end{bmatrix} . \qquad (7.3)$$

la matrice de covariance de $Y_n(u)$ est

$$\Lambda_n = (\ < \Lambda\ \varphi_i , \varphi_j >\ ) \ . \qquad (7.4)$$

L'observation *approché* est définie par

$$Y_d^n = \begin{bmatrix} < \varphi_1 , Y_d > \\ \cdots \\ < \varphi_n , Y_d > \end{bmatrix} . \qquad (7.5)$$

Le critère des moindres carrés en dimension finie est bien connu (cf. par exemple [30]) et est défini par

$$J_n(u) = \left(Y_d^n - m_n(u)\right)' \Lambda_n^{-1} \left(Y_d^n - m_n(u)\right) . \qquad (7.6)$$

Nous avons alors

Proposition 7.1 :

$$J_n(u) \underset{n \to +\infty}{\to} J(u) \quad \forall\ u \in \mathscr{U}_{ad} \ \blacksquare \qquad (7.7)$$

Démonstration : $m_n(u)$ s'écrit

$$m_n(u) = \begin{bmatrix} \left((\varphi_1 , J_K \overline{Y}(u)) \right)_{K'} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \left((\varphi_n , J_K \overline{Y}(u)) \right)_{K'} \end{bmatrix} , \qquad (7.8)$$

de même Λ_n s'écrit

$$\Lambda_n = \left((J_K \Lambda\ \varphi_i , \varphi_j) \right)_{K'} \ ; \qquad (7.9)$$

$J_K \Lambda \in \mathscr{L}(K' ; K')$ est autodual [1] et défini positif. Donc $(J_K \Lambda)^{1/2}$ existe et est inversible. Si $\tilde{P}_n$ désigne le projecteur (dans K') sur le sous espace de K' engendré par $(J_K \Lambda)^{1/2} \varphi_1 \ldots$, $(J_K \Lambda)^{1/2} \varphi_n$, alors d'après le lemme 6.1 il est clair que

$$J_n(u) = \| \tilde{P}_n \left[(J_K \Lambda)^{-1/2} J_K \left(Y_d - \overline{Y}(u)\right) \right] \|^2_{K'} . \qquad (7.10)$$

Puisque $\varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ est une base orthonormée de K', il résulte du lemme 6.2 que

$$J_n(u) \underset{n \to +\infty}{\to} \| (J_K \Lambda)^{-1/2} J_K \left(Y_d - \overline{Y}(u)\right) \|^2_{K'} . \qquad (7.11)$$

Le membre de droite est égal à $\left(\left((J_K \Lambda)^{-1} J_K \left(Y_d - \overline{Y}(u)\right) , J_K \left(Y_d - \overline{Y}(u)\right) \right)_{K'} \right.$, soit $< \Lambda^{-1} \left(Y_d - \overline{Y}(u)\right), Y_d - \overline{Y}(u) >$, ce qui démontre (7.7) $\blacksquare$

---

(1) c'est-à-dire $\left((J_K \Lambda \varphi , \psi) \right)_{K'} = \left((\varphi , J_K \Lambda \psi) \right)_{K'}$, cf. [61] .

Supposons maintenant que l'espace des paramètres U soit un espace de Hilbert et que $\mathscr{U}_{ad}$ soit un convexe fermé *borné* de U. De plus nous supposons que $\overline{Y}(u)$ est *faiblement continue*, alors nous avons

Proposition 7.2 : Il existe des éléments $\hat{u}_n$ et $\hat{u}$ (non forcément uniques) vérifiant respectivement

$$J_n(\hat{u}_n) = \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J_n(u) \tag{7.12}$$

$$J(\hat{u}) = \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J(u) \tag{7.13}$$

et

$$\inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J_n(u) \underset{n \to +\infty}{\to} \inf J(u) \ . \tag{7.14}$$

toute sous suite extraite de $\hat{u}_n$ faiblement convergente admet comme limite un élément vérifiant (7.13). } (7.15)

Démonstration : Démontrons tout d'abord (7.13). Soit u_p une suite minimisante vérifiant

$$\lim_{p \to +\infty} J(u_p) = \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J(u) \ . \tag{7.16}$$

De la suite u_p, appartenant à $\mathscr{U}_{ad}$ (qui est faiblement compact), on peut extraire une sous suite, encore notée u_p, faiblement convergente vers $u^* \in \mathscr{U}_{ad}$.

Comme $\overline{Y}(u)$ est faiblement continue $(J_K \Lambda)^{1/2} J_K (Y_d - \overline{Y}(u_p))$ converge faiblement dans K′ vers $(J_K \Lambda)^{1/2} J_K (Y_d - \overline{Y}(u^*))$, d'où

$$J(u^*) \leqslant \lim\inf_{p \to +\infty} J(u_p) = \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J(u) \ , \tag{7.17}$$

ce qui prouve (7.13); (7.12) se démontre de manière identique.

Considérons maintenant une suite telle que $\hat{u}_n$. Soit, encore notée $\hat{u}_n$, une sous suite extraite faiblement convergente vers $u^* \in \mathscr{U}_{ad}$; $\tilde{P}_n$ étant autodual (dans K′) la suite $\tilde{P}_n (J_K \Lambda)^{-1/2} J_K (Y_d - \overline{Y}(u_n)) \to (J_K \Lambda)^{-1/2} J_K (Y_d - \overline{Y}(u^*))$ faiblement dans K′, d'où

$$J(u^*) \leqslant \lim\inf_{n \to +\infty} J_n(\hat{u}_n) \leqslant \lim\sup_{n \to +\infty} J_n(\hat{u}_n) \leqslant \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J(u) \ ; \tag{7.18}$$

la dernière inégalité est due au fait que $J_n(u) \leqslant J(u)$ $\forall\, u$ donc

$$J_n(\hat{u}_n) \leqslant \inf_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J(u) \quad \forall\, n \ ;$$

(7.18) implique immédiatement (7.14) et (7.15) ■

Le critère des moindres carrés étant très largement utilisé dans la théorie de l'estimation *en dimension finie*, en raison de son *identité* avec le critère du maximum de vraisemblance dans le cas de variables aléatoires suivant des lois de probabilités de *Gauss*, les propositions 7.1 et 7.2 sont donc des *motivations* (mais non des justifications)[1] du critère (7.2).

Remarque 7.1 : Le critère du maximum de vraisemblance utilisé en dimension finie est celui qui maximise la *densité* de la loi de probabilité de *l'observation* par rapport à la mesure de Lebesgue.

(1) Le choix d'un critère n'est évidemment pas simple. On doit se contenter de montrer les *qualités* des critères utilisés.

Ainsi pour $Y_n(u)$ cette densité serait dans le cas Gaussien

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Lambda_n|}} e^{-\frac{1}{2}(x - m_n(u))' \Lambda_n^{-1}(x - m_n(u))} , x \in R^n ;$$

ce qui revient bien à minimiser $J_n(u)$, pour x fixé $= Y_d^n$.

En dimension infinie, avec une observation de la forme (7.1) et $\eta_\varphi(\omega)$ correspondant à une mesure cylindrique de Gauss sur K, la notion de densité par rapport à la mesure de Lebesgue n'a plus aucun sens évidemment.

Une manière de réintroduire la notion de maximum de vraisemblance est d'opérer comme nous l'avons fait en 6.3 et nous avons signalé à la remarque 6.2 l'identité avec le critère (7.2).

8 - Modèle n° 2 : Le paramètre à estimer est « stochastique » [2]

On suppose que U désigne l'espace de Hilbert du paramètre, de dual U′ et K désigne l'espace de Hilbert de l'observation, de dual K′ ; U et K sont séparables.

On se donne sur le produit U × K une mesure cylindrique μ d'espérance mathématique $(\bar{u}, 0)$ et d'opérateur de covariance $P = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U' \times K' ; U \times K)$, où $M \in \mathcal{L}(U' ; U)$ et $\Lambda \in \mathcal{L}(K' ; K)$ sont *inversibles.*

Soit $\mathscr{C} \in \mathcal{L}(U ; K)$ donné. On considère l'application $g \in \mathcal{L}(U \times K ; U \times K)$ définie par

$$g = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathscr{C} & I \end{pmatrix} . \qquad (8.1)$$

D'après le n° 2.4 la mesure cylindrique image $g(\mu)$ sur U × K a $(\bar{u}, \mathscr{C}\bar{u})$ comme espérance mathématique et comme opérateur de covariance $g P g^*$, soit

$$Q = g P g^* = \begin{pmatrix} M & M\mathscr{C}^* \\ \mathscr{C}M & \mathscr{C}M\mathscr{C}^* + \Lambda \end{pmatrix} . \qquad (8.2)$$

Soit $(u_d, Y_d) \in U \times K$. La quantité $\check{J}$ analogue à (7.2)[1] relative à la mesure cylindrique $g(\mu)$ sur U × K s'écrit

$$\check{J} = < Q^{-1} \begin{pmatrix} u_d - \bar{u} \\ Y_d - \mathscr{C}\bar{u} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} u_d - \bar{u} \\ Y_d - \mathscr{C}\bar{u} \end{pmatrix} > . \qquad (8.3)$$

Nous avons alors

Proposition 8.1 : La quantité $\check{J}$ définie en (8.3) est fournie par

$$\check{J} = < M^{-1}(u_d - \bar{u}) , u_d - \bar{u} > + < \Lambda^{-1}(Y_d - \mathscr{C}u_d) , Y_d - \mathscr{C}u_d > . \qquad (8.4)$$

Démonstration : $Q^{-1} \in \mathcal{L}(U \times K ; U' \times K')$ est égal à

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} + \mathscr{C}^*\Lambda^{-1}\mathscr{C} & -\mathscr{C}^*\Lambda^{-1} \\ -\Lambda^{-1}\mathscr{C} & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} \qquad (8.5)$$

il suffit alors d'expliciter le second membre de (8.3) ■

Le problème se présente alors de la manière suivante. Dans la formule (8.4) on suppose que seule *l'observation* Y_d est donnée. On pose alors

$$J(u) = < M^{-1}(u - \bar{u}) , u - \bar{u} > + < \Lambda^{-1}(Y_d - \mathscr{C}u) , Y_d - \mathscr{C}u > . \qquad (8.5)$$

---

(1) Dans la formule (7.2) u doit être considéré comme fixe et ne joue pas le même rôle que Y_d. Ci-dessus le couple (u_d, Y_d) joue le rôle de Y_d.

(2) Le caractère stochastique du paramètre ne doit pas être confondu avec la loi à priori de la théorie Bayésienne. Il s'agit ici de propriétés *stochastiques* bien connues et objectives du paramètre.

Définition 8.1 : Dans le cas où au paramètre à estimer u, est associée une mesure cylindrique de type Bruit blanc, l'estimation des *moindres carrés* consiste à minimiser la fonctionnelle $J(u)$.

Remarque 8.1 : Si on passe en dimension finie en considérant une base $\varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ de U' et une base $\psi_1 \ldots \psi_p \ldots$ de K', on peut associer à $J(u)$ une suite de critères des moindres carrés $J_{np}(u)$ définis par

$$J_{np}(u) = (u_n - \overline{u}_n)' M_n^{-1} (u_n - \overline{u}_n) + \left(Y_d^p - (\mathscr{C} u)^p\right) \Lambda_p^{-1} \left(Y_d^p - (\mathscr{C} u)^p\right) ; \qquad (8.6)$$

les quantités indicées par n ou p étant définies comme en (7.3) et (7.4). Bien entendu toutes les motivations exposées au n° 7 demeurent valables.

Remarque 8.2 : le modèle n° 2 correspond à une fonction aléatoire réelle linéaire sur le dual K' de l'espace des observations, de la forme

$$Y_\varphi(\omega_1 ; \omega_2) = u_{\mathscr{C}^* \varphi}(\omega_1) + \eta_\varphi(\omega_2) . \qquad (8.7)$$

On peut dire, de façon *formelle*, que l'observation est définie par :

$Y = \mathscr{C} u + \eta$ (à u et η sont associées des mesures cylindriques de type Bruit blanc); η erreur de mesure.

Remarque 8.3 : Dans le cas où $\mathscr{C}$ serait *non linéaire*, on peut être tenté de conserver le même critère des moindres carrés (8.5). Cependant le support probabiliste de ce critère disparaît presque complètement. En effet g étant non linéaire l'image $g(\mu)$ de la mesure cylindrique μ (qui elle est toujours valable) n'a plus de sens.

CHAPITRE II

IDENTIFICATION DE SYSTÈMES RÉGIS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Introduction

Dans ce chapitre nous montrons comment les méthodes générales d'estimation présentées au chapitre I peuvent s'appliquer au problème de l'identification des systèmes. Nous considérons les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles.

Au paragraphe 1, nous appliquons la théorie de l'estimation bayésienne. Le numéro 1 est consacré à quelques remarques générales, ayant pour but de décrire le problème de la « boîte noire » dans sa généralité.

Au numéro 2, nous étudions les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles elliptiques, puis au numéro 3 les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles de type parabolique, et enfin au numéro 4 les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, ou bien posé au sens de Petrowsky.

Au paragraphe 2, nous appliquons la théorie de l'estimation au sens des moindres carrés. Une théorie totalement générale étant actuellement très difficile, nous présentons un certain nombre de problèmes particuliers. Le paramètre à identifier est alors supposé déterministe, et l'erreur de mesure est stochastique. Nous utilisons alors diverses méthodes d'optimisation, en particulier la pénalisation et nous étudions dans chaque cas le problème discretisé correspondant.

Le paragraphe est divisé en quatre sous paragraphes, consacrés chacun à l'étude d'un modèle spécial. Le sous paragraphe 2.A traite du modèle elliptique « bilinéaire ». Le numéro 5 présente le modèle vrai et le modèle régularisé. Au numéro 6, nous introduisons la méthode de pénalisation[2]. Nous établissons les théorèmes de convergence vers les estimateurs des moindres carrés. Les numéros 7 et 8 sont consacrés aux problèmes discretisés correspondants, et aux théorèmes de convergence, lorsque tendent vers 0 simultanément les paramètres de discrétisation et de pénalisation[1]. Les numéros 9 et 10 traitent du cas où les observations se font sur la surface.

Le sous paragraphe 2B traite des mêmes questions dans le cas d'un modèle elliptique plus complexe.

Le sous paragraphe 2C étudie l'analogue parabolique du modèle elliptique du sous paragraphe 2A, et le sous paragraphe 2D étudie l'analogue parabolique du modèle elliptique du sous paragraphe 2B.

Plan détaillé

§1 : Application de l'estimation au sens de Bayes.

1. *Quelques remarques générales.*

   1.1. Boîte noire déterministe.
   1.2. Boîte noire à entrée stochastique.
   1.3. Orientation.

---

(1) pour l'analogue en théorie du contrôle, cf. [62] , [10].
(2) Cette méthode a été également utilisée par BALAKRISHNAN [4].

2. *Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles du type elliptique.*

2.1. Hypothèses - Notations.
2.2. Propriétés stochastiques de l'observation.
2.3. Approximation.
2.4. Exemple : problème de Neumann.

3. *Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles du type parabolique.*

3.1. Hypothèses - Notations.
3.2. Propriétés stochastiques de l'observation.
3.3. Approximation.
3.4. Exemple : Problème de Dirichlet. Observation de l'état à l'instant T.

4. *Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique ou bien posé au sens de Petrowsky.*

4.1. Hypothèses - Notations.
4.2. Propriétés stochastiques de l'observation.
4.3. Remarques.

§2 : Application de l'estimation au sens des moindres carrés.

2A : *Le modèle elliptique « bilinéaire ».*

5. *Le problème vrai et le problème régularisé.*

5.1. Hypothèses - Notations.
5.2. Régularisation.

6. *Pénalisation.*

6.1. Le problème pénalisé.
6.2. Convergence lorsque $\epsilon \to 0$
6.3. Cas où ϵ et λ convergent vers 0 simultanément.

7. *Discrétisation.*
7.1. Orientation.
7.2. Hypothèses - Notations.
7.3. Passage à la limite.

8. *Autre schéma de discrétisation.*

8.1. Hypothèses - Notations.
8.2. Existence d'un minimum de la fonctionnelle approchée.
8.3. Convergence.

9. *Observations sur la surface - Cas déterministe.*

9.1. Hypothèses - Notations.
9.2. Existence d'un minimum de la fonctionnelle approchée.
9.3. Convergence.

10. *Observations sur la surface - Cas stochastique.*

10.1. Le problème - Hypothèses - Notations.
10.2. Fonctionnelle discretisée.
10.3. Convergence.

2B : *Modèle elliptique : Identification des coefficients de l'opérateur.*

11. *Problème vrai et problème régularisé.*

11.1. Hypothèses - Notations.
11.2. Régularisation.

12. *Pénalisation.*

12.1. Fonctionnelle pénalisée.

12.2. Convergence lorsque $\epsilon \to 0$.
12.3. Convergence lorsque ϵ, $\lambda \to 0$ simultanément.
2C : *Modèle parabolique bilinéaire.*

13. *Problème vrai - Problème pénalisé.*

13.1. Hypothèses - Notations.
13.2. Le problème approché.
13.3. Convergence lorsque ϵ, $\lambda \to 0$.

14. *Modèle discrétisé.*

14.1. Hypothèses - Notations.
14.2. Passage à la limite.

15. *Observations sur la surface.*

15.1. Hypothèses - Notations.
15.2. Convergence lorsque ξ, $\epsilon \to 0$.

2D : *Modèle parabolique : Identification des coefficients de l'opérateur.*

16. *Problème vrai et problème approché.*

16.1. Hypothèses - Notations.
16.2. Pénalisation.

§ 1 : Application de l'estimation au sens de Bayes.

1 - Quelques remarques générales.

1.1 - Boîte noire déterministe.

On considère un système (physique, mécanique...) représentable par le modèle mathématique suivant :

$\zeta_0, \zeta_1, \Phi_0, \Phi_1, \cdots \Phi_N$ désignent des espaces de Hilbert; P est un opérateur $\in \mathscr{L}(\zeta_0 ; \zeta_1)$; $B \in \mathscr{L}(\Phi_0 ; \zeta_1)$ $\mathscr{A}_i \in \mathscr{L}(\zeta_0 ; \Phi_i)$, $i = 1 \cdots N$ et on a

$$Pz = B\xi + f \qquad (1.1)$$

$$\mathscr{A}_j z = \xi_j \qquad j = 1 \cdots N, \qquad (1.2)$$

où $z \in \zeta_0$ solution de (1.1) et (1.2) représente *l'état du système,* [1] $\xi \in \Phi_0, \xi_j \in \Phi_j$, $j = 1 \cdots N$, représentent *l'entrée du système* [2]. L'*observation* ou *sortie* du système est définie par

$$Y = \mathscr{F} z \qquad (1.3)$$

où $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\zeta_0 ; K)$, K étant un espace de Hilbert appelé *espace des observations.*

L'entrée et la sortie sont les éléments du système que l'on peut atteindre par la *mesure.* Les opérateurs P et $\mathscr{A}j$ sont soit connus, et dans ce cas le système est parfaitement bien défini, soit mal connus et alors *le problème consiste à les identifier sur le seul vu de l'entrée-sortie.* On dit que $\{ P, \mathscr{A}j \}$ est une *boîte noire* [4].

On suppose, en général, que P et $\mathscr{A}j$ sont des fonctions connues d'un paramètre $u \in U$, espace de Hilbert des paramètres, de sorte que la sortie Y est une fonction du paramètre u, dont la valeur précise est non connue (c'est cette valeur qu'il s'agit d'identifier).

1.2 - Boîte noire à entrée stochastique.

Posons pour simplifier

$$\Phi = \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_N, \qquad (1.4)$$

et considérons l'espace de Hilbert produit $\Phi \times K$. Nous le munissons d'une mesure cylindrique δ. Nous considérons ensuite l'application γ_u de $\Phi \times K \to K$ définie de la manière suivante : tout d'abord nous faisons l'hypothèse que

$\{ \xi, \xi_1, \cdots, \xi_N \} \to z$ définie par (1.1) et (1.2) est *continue*, pour toute valeur u fixée du paramètre. Elle est donc affine continue. $\qquad (1.5)$

L'équation (1.3) définit alors une application affine continue de $\Phi \to K$, soit γ_u^0 et nous posons pour $\xi, \xi_1 \cdots \xi_N \in \Phi$ et $\eta \in K$

$$\gamma_u(\xi, \xi_1, \cdots \xi_N ; \eta) = \gamma_u^0(\xi, \xi_1, \cdots \xi_N) + \eta . \qquad (1.6)$$

Pour toute valeur fixée u du paramètre, γ_u (δ) *définit une mesure cylindrique sur* K. A cette mesure cylindrique correspond une fonction aléatoire sur K [3] que nous noterons $Y_\varphi(\omega ; u)$, $\varphi \in K$ et $\omega \in \underline{\omega}$ espace d'épreuves.

Nous voyons ainsi comment nous allons pouvoir appliquer la théorie de l'estimation bayésienne à l'identification des systèmes. Ce sera l'objet des numéros suivants.

---

(1) c'est-à-dire que le comportement de l'état du système étudié est le même que la solution de (1.1) et (1.2).

(2) (1.1) représente *l'équation* (différentielle ou aux dérivées partielles).
(1.2) représente les *conditions aux limites* associées à (1.1) qui font que la solution de (1.1) et (1.2) existe et est unique.

(3) rappelons que lorsque nous utilisons la théorie bayésienne, l'espace des observations K est identifié à son dual.

(4) à vrai dire, on connait ici pas mal de structure; il ne s'agit donc pas de la boîte noire la plus générale.

Remarque 1.1 : La mesure cylindrique δ se projette sur Φ en δ_1 et sur K en δ_2 : δ_1 représente la mesure cylindrique associée à l'entrée du système soit ξ , $\xi_1 \cdots \xi_N$ et δ_2 représente la mesure cylindrique associée à η, et s'interprète comme l'erreur d'observation faite à la sortie du système.

Remarque 1.2 : Les opérateurs P et $\mathcal{A}j$ définissant la boîte noire, dépendent du paramètre inconnu u, mais ne sont pas stochastiques [1]. La difficulté à considérer des boîtes noires stochastique est la suivante : les propriétés stochastiques de l'état z du système (solution de (1.1) et (1.2)), donc celles de la sortie Y sont considérablement plus difficiles à expliciter. Il est possible avec des hypothèses convenables de démontrer l'existence d'une variable aléatoire $z(\omega)$ solution de (1.1), (1.2) (cf. par exemple [5]). Mais il est alors très difficile d'en exprimer l'espérance mathématique et l'opérateur de covariance à l'aide des données (cf. toutefois les travaux en ce sens de KRAICHNAN [31], U. FRISCH [23], BOURRET [12]). Notons tout de suite cependant qu'une très grande variété de boîtes noires rentrent dans le cadre (1.1), (1.2).

Remarque 1.3 : Dans le cas où la mesure cylindrique δ_1 associée à l'entrée du système est nulle, alors il est possible de considérer des boîtes noires non linéaires (*i. e.* P et $\mathcal{A}j$ sont non linéaires) :

1.3 - Orientation:

Nous allons étudier en détail le cas où P et $\mathcal{A}j$ sont des opérateurs aux dérivées partielles. Nous considérerons successivement des problèmes elliptiques, paraboliques, hyperboliques (ou bien posés au sens de Petrowsky).

Pour l'identification des systèmes en dimension finie (ζ_0 est alors un espace euclidien de dimension finie) cf. [33] , [25] , [26] et la bibliographie correspondante.

2 - Système gouverné par des équations aux dérivées partielles de type elliptique.

2.1 - Hypothèses - Notations.

Soient V et H deux espaces de Hilbert avec

$$\text{V} \subset \text{H}, \text{ et l'injection de V dans H est continue.} \tag{2.1}$$

Identifions H et son dual. Nous avons alors, si V′ désigne le dual de V

$$\text{V} \subset \text{H} \subset \text{V}' . \tag{2.2}$$

Soit U un espace de Hilbert (espace des paramètres) et U_0 un convexe fermé borné de U, par exemple, (4.1) chap. I. Pour $u \in \text{U}_0$, on considère une famille $\text{A}(u)$ d'opérateurs $\in \mathcal{L}(\text{V}; \text{V}')$ vérifiant

$$\sup_{u \in \text{U}_0} \| \text{A}(u) \|_{\mathcal{L}(\text{V}; \text{V}')} \text{ borné} \tag{2.3}$$

$$< \text{A}(u)\varphi , \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|_{\text{V}}^2 ; \forall \varphi \in \text{V} ; \alpha > 0 \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{[2] si } u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u \text{ et si } \varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} \varphi \text{ dans V } \textit{faiblement}, \text{ alors } \text{A}(u_n)\varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} \text{A}(u)\varphi \\ \text{dans V' faiblement et } \text{A}^*(u_n)\varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} \text{A}^*(u)\varphi \text{ faiblement dans V'.} \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Soit E un espace de Hilbert et $\text{B} \in \mathcal{L}(\text{E}; \text{V}')$. Nous introduisons enfin un espace d'épreuves (ω, v). Pour u fixé l'état du système $z \equiv z(u) \equiv z(\omega; u)$ est défini comme la solution de l'équation

$$\text{A}(u) z = f + \text{B}\,\xi(\omega) , \tag{2.6}$$

---

(1) à l'exclusion, bien entendu, de l'artifice bayésien qui consiste à définir une loi de probabilité à priori (subjective) sur le paramètre inconnu.

(2) Cette hypothèse, réalisée dans de nombreuses applications est loin d'être la plus générale.

où $f \in V'$ et $\xi(\omega)$ est une variable aléatoire à valeur dans E. Pour u et ω fixés, (2.6) définit z de façon unique dans V (cf. [34]). Enfin l'observation ou sortie du système est définie par la formule

$$Y \equiv Y(\omega ; u) = \mathscr{C} z(\omega ; u) + \eta(\omega) , \tag{2.7}$$

où $\mathscr{C} \in \mathscr{L}(V ; K)$, (K étant espace de Hilbert des observations) et $\eta(\omega)$ est une variable aléatoire à valeur dans K (représentant l'erreur d'observation). Nous munissons U d'une loi de probabilité μ concentrée sur U_0. Nous avons alors

Proposition 2.1 : L'observation $Y(\omega ; u)$ est une variable aléatoire à valeur dans K et définie sur l'espace $\underline{\omega} \times U$ muni de la loi de probabilité $\rho = \nu \otimes \mu$.

Démonstration :

Puisque $\xi(\omega)$ est une variable aléatoire, il est toujours possible, pour tout $\epsilon > 0$ donné de trouver un compact $C_0 \subset \underline{\omega} \times U$ de mesure $\rho(C_0) \geqslant 1 - \epsilon$, sur lequel l'application

$u , \omega \xrightarrow{\gamma_1} u , B\xi(\omega) + f$ soit continue. Or l'application $u , \omega \to z(\omega , u)$ définie par (2.6) est composée de γ_1 par l'application $u , \varphi \xrightarrow{\gamma_2} z_1(u , \varphi)$ définie par

$$A(u) z_1 = \varphi \in H. \tag{2.8}$$

Montrons que γ_2 est continue de $U \times H \to V$. Soit (u_n , φ_n) une suite convergente vers u^* , φ^*, et soit z_n solution de

$A(u_n) z_n = \varphi_n$;

z_n demeure borné dans V lorsque $n \to + \infty$. En effet de (2.4) on déduit

$$\alpha \| z_n \|_V^2 \leqslant < A(u_n) z_n , z_n > = < \varphi_n , z_n > \tag{2.9}$$

$$\leqslant \text{Cte} \times \| z_n \|_V$$

Soit une sous suite, encore notée z_n, extraite, faiblement convergente dans V vers un élément z^*. De (2.8) on tire

$$< A(u_n) z_n , \psi > = < \varphi_n , \psi > \quad \forall \psi \in V. \tag{2.10}$$

En utilisant l'hypothèse 2.5 et en passant à la limite, il vient

$$< A(u^*) z^* , \psi > = < \varphi^* , \psi > \tag{2.11}$$

donc

$$z^* = z_1(u^* , \varphi^*) . \tag{2.12}$$

En raison de l'unicité de la limite z^*, toute la suite z_n converge faiblement dans V vers z^*. Il y a convergence forte car

$$< A(u_n) z_n , z_n > = < \varphi_n , z_n > \underset{n \to + \infty}{\to} < \varphi^* , z^* > \tag{2.13}$$

donc

$$< A(u_n) z_n , z_n > \to < A(u^*) z^* , z^* >$$

et

$$\alpha \| z_n - z^* \|_V^2 \leqslant < A(u_n)(z_n - z^*) , z_n - z^* > = < A(u_n) z_n , z_n > \tag{2.14}$$

$$+ < A(u_n) z^* , z^* > - < A(u_n) z_n , z^* > - < A^*(u_n) z_n , z^* > ,$$

et le membre de droite converge en raison de (2.5) vers 0 lorsque $n \to + \infty$. La proposition est ainsi démontrée.

Remarque 2.1 : On peut faire le raccord entre le n° 2.1 et les considérations générales du n° 1 de la manière suivante : On a $\zeta_0 = V$, $\zeta_1 = V'$, $P = A$, $\mathscr{A}_j = 0$, $j = 1 ... n$; $\mathscr{F} = \mathscr{C}$; $\Phi_0 = E$. Les ξ_j sont nuls. La mesure cylindrique δ sur Φ se réduit à une mesure cylindrique sur $\Phi_0 \times K \equiv E \times K$, définie de la manière suivante : On considère l'application

$$\omega \xrightarrow{\eta} \{ \xi(\omega) , \eta(\omega) \}$$

de $\underline{\omega} \to E \times K$, et δ est alors la mesure de Radon sur $E \times K$, image de la mesure de Radon ν sur $\underline{\omega}$, par l'application π. La mesure cylindrique $\gamma_u(\delta)$ sur K n'est autre que la mesure de Radon sur K, image de ν sur $\underline{\omega}$, par l'application

$\omega \overset{\beta}{\to} Y(\omega; u)$,

définie en (2.7). Et $Y_\varphi(\omega ; u)$ est alors donné par

$$Y_\varphi(\omega ; u) = (\varphi , Y(\omega ; u)) = (\varphi , \mathscr{C}z(\omega ; u)) + (\varphi , \eta(\omega)) .$$

2.2 - Propriétés stochastiques de l'observation.

Nous considérons la loi de probabilité image de ν sur l'espace $E \times K$ et définie par l'application $\omega \overset{\Pi}{\to} \{ \xi(\omega), \eta(\omega) \}$.

Nous allons supposer que

$\pi(\nu)$ est une loi de probabilité de Gauss sur $E \times K$ d'espérance mathématique $\{ \overline{\xi}, 0 \}$ et d'opérateur de covariance défini par la matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ *(2.18)*

$Q \in \mathscr{L}(E; E)$ auto-adjoint, défini positif et *nucléaire* (1). *(2.19)*

$R \in \mathscr{L}(K; K)$ auto-adjoint, défini positif et *nucléaire.* *(2.20)*

Soit $\varphi \in K$ donné quelconque. Nous avons

$$\begin{aligned} (Y(\omega; u), \varphi)_K &= (\mathscr{C}z(\omega; u), \varphi)_K + (\eta(\omega), \varphi)_K \\ &= < z(\omega; u), \mathscr{C}^* \varphi > + (\eta(\omega), \varphi)_K . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Soit $p \equiv p(u, \varphi)$ la solution de

$$A^*(u) p = \mathscr{C}^* \varphi \in V', \quad (2.22)$$

alors (2.21) donne

$$\begin{aligned} (Y(\omega ; u) , \varphi)_K &= < A(u) z(\omega ; u) , p(u , \varphi) > + (\eta(\omega) , \varphi)_K \\ &= < f, p(u, \varphi) > + < B\xi(\omega), p(u, \varphi) > + (\eta(\omega), \varphi)_K , \end{aligned} \quad (2.23)$$

soit

$$(Y(\omega; u), \varphi)_K = < f, p(u, \varphi) > + (\xi(\omega), B^* p(u, \varphi))_E + (\eta(\omega), \varphi)_K . \quad (2.24)$$

La formule (2.24) montre que la loi de probabilité de $Y(\omega; u)$ est pour u fixé une loi de probabilité de Gauss (puisque le second membre de (2.24) est une somme de variables aléatoires réelles gaussiennes). L'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et l'opérateur de covariance $\Lambda(u)$ sont alors définis par les formules :

$$(\overline{Y}(u), \varphi)_K = < f, p(u, \varphi) > + < B\overline{\xi}, p(u, \varphi) > \quad \forall \varphi \in K \quad (2.25)$$

et

$$(\Lambda(u) \varphi , \psi)_K = < BQB^* p(u , \varphi) , p(u , \psi) > + (R \varphi , \psi)_K . \quad (2.26)$$

Nous avons ainsi démontré

Théorème 2.1 : Hypothèses et notations de 2.1 et 2.2. L'observation $Y(\omega; u)$ définie en (2.7) suit pour tout u fixé dans U_0, une loi de probabilité de Gauss sur K dont l'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et l'opérateur de covariance $\Lambda(u)$ sont définis par les formules (2.25) et (2.26).

2.3 - Approximation.

Le problème consiste à approximer les formules (2.25) et (2.26). Nous avons besoin de procédés d'approximation dans un cadre hilbertien. Nous allons utiliser pour cela les schémas de J. CEA [15] et J.-P. AUBIN [3]. Nous allons en exposer un, brièvement, en utilisant la présentation de R. TEMAM [57].

---

(1) E est supposé identifié à son dual.

Nous introduisons un espace de hilbert $\check{H}$ dont H est un sous espace hilbertien [1] .

Nous nous donnons un espace de hilbert Φ et nous posons

$$F = \check{H} \times \Phi. \tag{2.27}$$

Soit P la projection canonique de F sur $\check{H}$. Nous supposons qu'il existe un opérateur $\varpi \in \mathscr{L}(V; F)$ tel que $P\varpi$ soit l'identité.

Soit $\tilde{a}_*(u; p, q)$, pour u fixé $\in U_0$, une forme bilinéaire sur F avec

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_*(u; \varpi p, \varpi q) = <A^*(u)p, q> \\ &\forall p, q \in V \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

et

$$|\tilde{a}_*(u; p, q)| \leqslant M \|p\|_F \|q\|_F \qquad \forall u \in U_0 \tag{2.29}$$

$$\tilde{a}_*(u; p, p) \geqslant \alpha \|p\|_F^2 \qquad \forall u \in U_0 \; \alpha > 0. \tag{2.30}$$

soit l un indice appartenant à un espace d'indices de dimension finie et soit V_l une famille d'espaces vectoriels de dimension finie N (l). Nous nous donnons $r_l \in \mathscr{L}(H ; V_l)$ et $\chi_l \in \mathscr{L}(V_l ; \check{H})$ avec

$$|\chi_l r_l|_{\mathscr{L}(H ; \check{H})} \leqslant C . \tag{2.31}$$

Soit enfin Π_l une application linéaire biunivoque de V_l dans F.

Nous supposons que

$$P \, \pi_l = \chi_l . \tag{2.32}$$

Nous faisons les hypothèses de consistance suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\text{il existe un sous espace } \mathscr{V} \text{ dense dans V (éventuellement V lui-même), tel que,} \\ &\text{pour tout } p \in \mathscr{V} \\ &\pi_l r_l p \to \varpi p \text{ dans F fortement, lorsque } l \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{soit } l' \text{ une suite qui tend vers 0. Soit } p_{l'} \text{ une suite d'éléments de } V_{l'} \text{ telle que} \\ &\text{lorsque } l' \to 0 \\ &\pi_{l'} p_{l'} \to \varphi \text{ dans F' faible} \\ &\chi_{l'} p_{l'} \to \psi \text{ dans } \check{H} \text{ faible} \\ &\text{alors } \psi = P\varphi \in V \text{ et } \varphi = \varpi\psi. \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Nous allons faire deux hypothèses simplificatrices [2].

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}(H ; K) \tag{2.35}$$

$$B \in \mathscr{L}(E ; H) \; ; \; f \in H . \tag{2.36}$$

Alors dans les formules (2.22) et (2.26) $\mathscr{C}^* \varphi \in H$ et $BQB^* p(u, \varphi) \in H$.

On introduit $p_l \equiv p_l(u , \varphi)$ solution de

$$\tilde{a}_*(u; \pi_l p_l, \pi_l q_l) = (r_l C^* \varphi, \chi_l q_l)_H \; \forall q_l \in V_l$$

Puis nous définissons les approximations $\overline{Y}_l(u)$ et $\Lambda_l(u)$ de $\overline{Y}(u)$ et $\Lambda(u)$ par les formules

$$\left(\overline{Y}_l(u), \varphi\right)_K = \left(f, \chi_l p_l(u, \varphi)\right)_H + \left(B\overline{\xi}, \chi_l p_l(u, \varphi)\right)_H \tag{2.38}$$

$$\left(\Lambda_l(u)\varphi, \psi\right)_K = \left(BQB^* \chi_l p_l(u, \varphi), \chi_l p_l(u, \psi)\right)_H + (R\varphi, \psi)_K. \tag{2.39}$$

On démontre alors (CEA [15]) que lorsque $l \to 0$, $\chi_l p_l(u , \varphi) \to p(u , \varphi)$ dans H fortement, par conséquent il est clair que les approximations $\overline{Y}_l(u)$ et $\Lambda_l(u)$ de $\overline{Y}(u)$ et $\Lambda(u)$ vérifient les hypothèses (5.1) et (5.2) du Chapitre I. Il suffit alors de se donner une famille K_h de sous espaces vectoriels de K, comme dans le n° 5.1.1. pour pouvoir

---

(1) Nous notons de la même manière le produit scalaire dans H et dans $\check{H}$.

(2) nullement essentielles. On peut s'en passer par exemple en utilisant les schémas d'AUBIN [3].

appliquer le théorème 5.1 du Chapitre I. Si nous posons

$$\tau_h \overline{Y}_l(u) = \left[\left(\overline{Y}_l(u), e_h^1\right)_K \ldots \left(\overline{Y}_l(u), e_h^{N(h)}\right) \right] \tag{2.40}$$

$$\Lambda_{hl}(u) = \left(\Lambda_l(u)\, e_h^i, e_h^j\right)_K \qquad i,j = 1 \ldots N(h) \tag{2.41}$$

alors nous pouvons résumer l'application du théorème 5.1 par la

Proposition 2.2 : L'estimateur de Bayes approché

$$\hat{u}_{hl}(\tau_h Y) = \frac{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\, u\, e^{-\frac{1}{2}\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_l(u)\right)' \Lambda_{hl}^{-1}(u)\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_l(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{hl}(u)|}}}{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_l(u)\right)' \Lambda_{hl}^{-1}(u)\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_l(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{hl}(u)|}}} \tag{2.42}$$

vérifie

$$\lim_{l \to 0} \lim_{h \to 0} \hat{u}_{hl}(\tau_h Y) = \hat{u}(Y)$$

estimateur de Bayès du paramètre u du système décrit par (2.6).

2.4 - **Exemple : Problème de Neumann.**

Soit Ω un ouvert de R^n, borné et de frontière Γ suffisamment régulière. Nous prenons pour H l'espace $L_2(\Omega)$ et pour V l'espace de Sobolev d'ordre 1 $H^1(\Omega)$ (cf., par exemple [36]) :

$$H^1(\Omega) = \left\{ y \,|\, y \in L_2(\Omega), \frac{\partial y}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1 \ldots n \right\}. \tag{2.43}$$

Nous posons

$$< A(u)\, y, z > = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x; u_1 \ldots u_p) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} dx \tag{2.44}$$

$$+ \int_\Omega c(x; u_1 \ldots u_p)\, y\, z\, dx$$

avec

$$a_{ij} \text{ et } c \in L^\infty(\Omega) \quad \forall u = (u_1, \ldots u_p) \in R^p \tag{2.45}$$

$$a_{ij}(x; u) \geqslant \alpha > 0 \quad \text{et} \quad c(x; u) \geqslant \alpha > 0 \quad \text{p. p. } x; \quad \forall u \in R^p \tag{2.46}$$

l'application $u \to a_{ij}$ (ou c), $i, j = 1 \ldots n$ est continue de R^p dans $L^\infty(\Omega)$. (2.47)

Le problème (2.6) est alors équivalent au problème suivant (cf. [34]) :

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_{\substack{i=1 \\ j}}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij}(x; u)\frac{\delta z}{\delta x_j}\right) + c(x; u)\, z = B\, \xi(\omega) \qquad \text{p. p. } x \\ &\left.\frac{\delta z}{\delta \nu_A(u)}\right|_\Gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

$\dfrac{\delta z}{\delta \nu_A(u)}$ désignant la dérivée normale suivant l'opérateur $A(u)$, soit

$\sum_{i,j} a_{i,j}(x; u) \dfrac{\delta z}{\delta x_j} \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x_i})$ où $\overrightarrow{n}$ désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur.

Nous prenons comme observation

$$Y = Y(\omega; u) \equiv z(x; \omega; u), \; x \in \Omega_1 \subset \Omega, \; \Omega_1 \text{ ouvert.} \tag{2.49}$$

Définissons maintenant les éléments discrétisés intervenant dans le calcul de l'estimateur de Bayes approché (2.42). Donnons d'abord quelques notations qui nous serviront souvent

par la suite :

$$l = (l_1, \cdots l_n) \qquad l_i > 0 \tag{2.50}$$

R_l = ensemble des points de R^n de la forme $(j_1 l_1, \cdots, j_n l_n)$, j_i entrée de signe quelconque. (2.51)

$\overrightarrow{l_i}$ vecteur de R^n de composantes nulles, sauf la i^{eme} égale à l_i. (2.52)

$\sigma_l(\mathrm{M}\,;\,0)$, $\mathrm{M} = (m_1, \ldots, m_n)$, désigne le pavé $\prod_{i=1}^{n} \left[m_i - \frac{l_i}{2}, m_i + \frac{l_i}{2} \right]$ (2.53)

$$\sigma_l(\mathrm{M}\,;\,r) = \bigcup_{|j| \leqslant r} \sigma_l\left(\mathrm{M} + \tfrac{1}{2}\left(j_1 \overrightarrow{l_1} + \ldots + j_n \overrightarrow{l_n}\right)\,;\,0\right)$$

j_i entier de signe quelconque, $|j| = |j_1| + \cdots + |j_n|$ (2.54)

$\mathrm{W}_{l\mathrm{M}}$, fonction caractéristique de $\sigma_l(\mathrm{M}\,;\,0)$.

δ_i opérateur de différences finies (2.55)

$$\delta_i \varphi(x) = \frac{1}{l_1}\left[\varphi\left(x + \frac{\overrightarrow{l_i}}{2}\right) - \varphi\left(x - \frac{\overrightarrow{l_i}}{2}\right) \right] \tag{2.56}$$

$\Omega_l^r = \{ \mathrm{M} \,|\, \mathrm{M} \in \mathrm{R}_l, \sigma_l(\mathrm{M}; r) \cap \Omega \neq \Phi \}$.

Nous prenons alors pour les éléments intervenant au n° 2.3 :

$$\tilde{\mathrm{H}} = \mathrm{L}_2(\mathrm{R}^n)\,; \tag{2.58}$$

Nous identifions la fonction $u \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ et la fonction $\tilde{u} \in \mathrm{L}_2(\mathrm{R}^n)$ égale à u dans Ω et à 0 dans $\complement\Omega$; H est un sous espace hilbertien de $\tilde{\mathrm{H}}$;

$$\Phi = (\mathrm{L}_2(\Omega))^n, \mathrm{F} = \mathrm{L}_2(\mathrm{R}^n) \times \mathrm{L}_2(\Omega)\,; \tag{2.59}$$

$$\varpi y = \left(\tilde{y}, \frac{\delta y}{\delta x_1}, \cdots, \frac{\delta y}{\delta x_n} \right) \text{ pour } y \in \mathrm{V}\,; \tag{2.60}$$

Pour forme $\tilde{a}_*(u; p, q)$ nous prenons

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_*(u; p, q) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{jl}(x; u)\, p_j\, q_l\, dx + \int_{\mathrm{R}^n} d_l(x; u)\, p_0\, q_0\, dx \\ &\text{pour } p = [p_0, p_1, \cdots p_n]\,; q = [q_0, q_1, \cdots q_n] \in \mathrm{F} \\ &d_l(x\,;u) = c_l(x\,;u) \text{ pour } x \in \Omega \text{ et } \alpha \text{ si } x \notin \Omega\,; \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

On prend pour espace V_l l'espace de fonctions étagées

$$\mathrm{V}_l = \{ p_l \,|\, p_l(x) = \sum_{\mathrm{M} \in \Omega_l^1} p_l(\mathrm{M})\, \mathrm{W}_{l\mathrm{M}}(x) \}\,; \tag{2.62}$$

l'opérateur r_l est défini de la manière suivante : nous supposons que Ω possède la propriété de 1-prolongement (cf. [48]). Il existe alors un opérateur linéaire $\mathscr{P}$ continu de $\mathrm{L}_2(\Omega)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{R}^n)$ et de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{R}^n)$.

Pour $y \in \mathrm{H}$, nous définissons $y_l = r_l y$ en posant :

$$y_l(\mathrm{M}) = \frac{1}{l_1 \cdots l_n} \int_{\sigma_l(\mathrm{M};0)} \mathscr{P} y(x)\, dx\,. \tag{2.63}$$

On pose ensuite

$$\chi_l = \mathrm{I} \tag{2.64}$$

$$\pi_l y_l = (y_l, \delta_1 y_l|_{\Omega}, \ldots, \delta_n y_l|_{\Omega}) \tag{2.65}$$

où $g|_{\Omega}$ désigne la restriction à Ω d'une fonction g définie dans R^n.

Pour la vérification des hypothèses de 2.3 nous renvoyons à [57].

Il nous faut maintenant définir l'espace discrétisé des observations. Γ_1 désigne la frontière de Ω_1 : posons

$h = (h_1, \cdots h_n)$ (h pourra être différent de l). *(2.66)*

Nous définissons $\mathscr{R}_h$, $\overrightarrow{h_l}$, $\sigma_h(M; 0)$, $\sigma_h(M; 0)$, W_{hM} en remplaçant l par h dans les définitions (2.51), (2.52), (2.53), (2.54), (2.55).

L'opérateur de différences finies par rapport à h ne sera pas utilisé, donc la confusion avec (2.56) ne sera pas possible. Posons

$$\Omega_{1h}^r = \{ M | M \in \mathscr{R}_h, \sigma_h(M; r) \cap \Omega_1 \neq \Phi \}. \qquad (2.67)$$

L'espace K des observations est l'espace $L_2(\Omega_1)$. Nous prenons pour K_h l'espace des fonctions étagées

$$K_h = \{ y_h | y_h(x) = \sum_{M \in \Omega_{1h}^0} y_h(M) W_{hM}(x) \}; \qquad (2.68)$$

Une base de cet espace est fournie par les vecteurs

$$e_h^M \equiv e_h^M(x) = \frac{W_{hM}(x)}{\sqrt{mes(\Omega \cap \sigma_h(M; 0))}}; M \in \Omega_{1h}^0. \qquad (2.69)$$

Il est clair que si P_h désigne le projecteur sur K_h, on a

$$P_h y \underset{h \to 0}{\to} y \text{ fortement dans K; } \forall y \in K. \qquad (2.70)$$

Pour calculer les éléments entrant dans la formule (2.42), il faut utiliser les formules (2.40) et (2.41). Il faut donc calculer les quantités $(\overline{Y}_l(u), e_h^M)_K$ et $(\Lambda_l(u) e_h^M, e_h^P)_K$, pour $M, P \in \Omega_{1h}^0$. Il vient :

$$(\overline{Y}_l(u), e_h^M)_K = \sum_{Q \in \Omega_l^1} p_l(Q; u, e_h^M)(f + B\overline{\xi}, W_{lQ})_H; M \in \Omega_{1h}^0 \qquad (2.71)$$

et

$$(\Lambda_l(u) e_h^M, e_h^P)_K = \sum_{Q_1, Q_2 \in \Omega_l^1} p_l(Q_1; u, e_h^M) p_l(Q_2; u, e_h^P)(BQB^* e_h^M, e_h^P) \qquad (2.72)$$

$$+ (R e_h^M, e_h^P)_K; M, P \in \Omega_{1h}^0.$$

Les quantités $p_l(Q; u, e_h^M)$ intervenant dans les formules (2.71) et (2.72) se calculent alors par résolution des systèmes

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{Q \in \Omega_l^1} p_l(Q; u, e_h^M) \tilde{a}^*(u; \pi_l W_{lQ}, \pi_l W_{lQ_1}) = (r_l C^* e_h^M, W_{lQ_1}) \\ \forall Q_1 \in \Omega_l^1. \end{array}\right\} \qquad (2.73)$$

Les systèmes (2.73) doivent être résolus pour tout $M \in \Omega_{1h}^0$. Il est intéressant de noter que la matrice de (2.73) est la même $\forall M$. On doit donc résoudre à chaque fois le même système linéaire, avec second membre variable, ce qui s'automatise facilement.

Remarque 2.2. Il est, bien entendu, possible de considérer d'autres observations. En particulier on peut observer la valeur de la fonction z, solution de (2.48), sur la surface Γ du domaine Ω[1]. La difficulté est que l'on doit opérer avec les fonctions traces. K est alors $L^2(\Gamma)$, $\mathscr{C} = \gamma$ (opérateur de traces (cf [34])). L'équation (2.22) devient alors

$$< A^*(u) p, q > = (\varphi, \gamma q)_{L^2(\Gamma)}, \qquad (2.74)$$

(1) ce qui est important pour les applications.

ce qui s'interprète (cf [34]) par le système

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x;u)\frac{\partial p}{\partial q_j}\right)+c(x;u)p=0\\ &\left.\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}(u)}\right|_{\Gamma}=\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (2.75)$$

et le problème consiste alors à intégrer numériquement le système (2.75) pour des φ convenables donnés. Le problème est bien posé et on peut définir $p_l(u;\varphi)$ tel que les formules (2.38) et (2.39) donnent des approximations de $\overline{Y}(u)$ et $\Lambda(u)$ vérifiant les hypothèses (5.1) et (5.2) du Chapitre I. Nous renvoyons pour les détails concernant l'intégration numérique de (2.75) à CEA [15] ou à AUBIN [3].

Remarque 2.3. Il est possible de supposer que l'entrée stochastique du système se situe sur la surface Γ du domaine Ω. Par exemple, on considère le modèle

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x;u)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)+c(x;u)z=B\xi_1(\omega)\\ &z|_{\Gamma}=\xi_2(\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (2.76)$$

et une observation convenable $Y = \mathscr{C}z(\omega;u) + \eta(\omega)$, où $\mathscr{C} \in \mathscr{L}(H;K)$. Pour traiter ce genre de problème, il est nécessaire d'utiliser la théorie des problèmes aux limites non homogènes. Ceci alourdirait considérablement le présent travail. Pour tout ce qui concerne les problèmes aux limites non homogènes, nous renvoyons à LIONS-MAGENÉS [37].

Remarque 2.4 : Nous avons montré dans ce numéro, que les systèmes elliptiques étaient des exemples d'application de la théorie de l'estimation, présentée aux n^{os} 4 et 5. Pour construire des exemples de la théorie présentée au n° 6, il suffit de reprendre les mêmes systèmes, mais en supposant cette fois les entrées *non* stochastiques, et de supposer que l'erreur d'observation est du type bruit blanc : Ainsi, nous pouvons prendre (avec les notations du n° 2) :

$$A(u)z = f \qquad (2.77)$$

$$Y_\varphi(\omega\,;u) = \big(\varphi\,,\,\mathscr{C}z(u)\big) + \eta_\varphi(\omega) \qquad (2.78)$$

où $\eta_\varphi(\omega)$ est une fonction aléatoire linéaire définie sur K, à laquelle est associée une mesure cylindrique de Gauss, d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance Λ *inversible.* L'approximation est alors la même que celle présentée au n° 2.3. On peut alors appliquer le théorème 6.1 au lieu du théorème 5.1, et en déduire des propositions du type de la proposition 2.2.

Remarque 2.5 : La remarque 2.4 ne se limite pas aux systèmes elliptiques. Elle demeure évidemment valable pour les systèmes paraboliques, hyperboliques, etc. que nous étudierons aux n^{os} 3 et 4.

Remarque 2.6 : Conformément à la remarque générale 1.2, il est possible d'appliquer le théorème 5.1 à des systèmes stochastiques plus généraux que (2.6), par exemple

$$A(\omega;u)z = f + B\xi(\omega) \qquad (2.79)$$

avec une observation

$$Y \equiv Y(\omega;u) = \mathscr{C}z(\omega;u) + \eta(\omega). \qquad (2.80)$$

La difficulté est que pour les systèmes (2.79) et (2.80), on ne peut définir, en dehors de cas particuliers, d'approximations $\overline{Y}_l(u)$ et $\Lambda_l(u)$. Dans tous les cas où ceci est possible, le théorème 5.1 s'applique.

3. Système gouverné par des équations aux dérivées partielles de type parabolique.

3.1 - Hypothèses - Notations.

Les symboles communs aux numéros 3.1 et 2.1 ne seront pas redéfinis. Soit t, le temps

$\in [0, T]$. Nous considérons une famille $A(t; u)$, $t \in [0, T]$, $u \in U_0$ d'opérateurs $\in \mathscr{L}(V; V')$ vérifiant

$$\sup_{t,\, u} \| A(t; u) \|_{\mathscr{L}(V; V')} \text{ borné} \tag{3.1}$$

$$< A(t; u)\varphi, \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2 ; \forall \varphi \in V ; \alpha > 0 \ ^{(1)} \tag{3.2}$$

$$t \to < A(t; u)\varphi, \psi > \text{ est mesurable de } [0, T] \to R \ \forall \varphi, \psi \in V ; \forall u \in U_0 \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } \varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} \varphi \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faiblement et } u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u, \text{ alors} \\ A(t; u_n)\varphi_n \to A(t; u)\varphi \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faiblement et } A^*(t; u_n)\varphi_n \\ \to A^*(t; u)\varphi \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faiblement } ^{(2)}. \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

L'état z du système $z \equiv z(\omega; u)$ est alors défini par le modèle

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} + A(t; u) z = f + B\xi(\omega) \\ z(0) = z_0(\omega) \\ \text{pour } u \text{ et } \omega \text{ fixés } z \in L^2(0, T; V), \dfrac{dz}{dt} \in L^2(0, T; V') \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

avec

$$B \equiv B(t) \in \mathscr{L}\big(E; L^2(0, T; V')\big) \tag{3.6}$$

$z_0(\omega)$ est une variable aléatoire à valeur dans H. (3.7)

On sait (cf. [34]) que pour u et ω fixés (3.5) définit z de façon unique. Posons

$$W(0, T) = \{ \varphi \,|\, \varphi \in L^2(0, T; V), \varphi' \in L^2(0, T; V') \}. \tag{3.8}$$

L'observation $Y = Y(\omega; u)$ est alors définie par

$$Y(\omega; u) = \mathscr{C} z(\omega; u) + \eta(\omega) \tag{3.9}$$

où $\mathscr{C} \in \mathscr{L}\big(W(0, T); K\big)$.

Nous avons alors

Proposition 3.1 : l'observation $Y(\omega ; u)$ est une variable aléatoire à valeur dans K et définie sur l'espace $\underline{\omega} \times U$ muni de la loi de probabilité $\rho = \nu \otimes \mu$.

Démonstration : Comme pour la proposition 2.1, il existe un compact $C_0 \subset \underline{\omega} \times U$ de mesure $\rho(C_0) \geqslant 1 - \epsilon$, sur lequel l'application u, $\omega \overset{\gamma_1}{\to} u$, $f + B\xi(\omega)$, $z_0(\omega)$ est continue $\to U \times L^2(0, T; V') \times H$. Or l'application $z(\omega ; u)$ définie par (3.5) est composée de γ_1 par $\gamma_2 : U \times L^2(0, T; H) \times H \to W(0, T)$ définie par $z_1 \equiv z_1(u ; \varphi, \varphi_0)$ solution de

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dz_1}{dt} + A(t ; u) z_1 = \varphi \\ z_1(0) = \varphi_0 . \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Montrons que γ_2 est continue. Soit une suite $u_n \varphi_n \varphi_{0n} \to u, \varphi, \varphi_0$ dans $U \times L^2(0, T; H) \times H$. Posons $z_n = z_1(u_n ; \varphi_n ; \varphi_{0n})$. On déduit de (3.10)

$$< z_n, \frac{dz_n}{dt} > + < A(t ; u_n) z_n, z_n > = < \varphi_n, z_n >$$

d'où

$$|z_n(t)|^2 + \int_0^t < A(\tau ; u_n) z_n, z_n > d\tau = |\varphi_{0n}|^2 + \int_0^t < \varphi_n, z_n > d\tau \tag{3.11}$$

d'où

$$\alpha \int_0^T \| z_n \|_V^2 \, dt \leqslant |\varphi_{0n}|^2 + \| \varphi_n \|_{L^2(0, T; V')} \| z_n \|_{L^2(0, T; V)} \tag{3.12}$$

(1) Il suffit qu'$\exists \lambda$ tel que $< A(t; u)\varphi, \varphi > + \lambda |\varphi|_H^2 \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2$.

(2) cf. note de bas de page de 2.1

$$\leqslant |\varphi_{0n}|^2 + \frac{\beta}{2} \| z_n \|^2_{L^2(0,T;V)} + \frac{1}{2\beta} \| \varphi_n \|^2_{L^2(0,T;V')}$$

$\forall\ \beta > 0$; d'où en prenant β assez petit (il suffit de choisir $\beta < 2\ \alpha$), il suit que z_n demeure dans un borné de $L^2(0, T; V)$ lorsque $n \to +\infty$. Soit alors une sous suite extraite, encore notée z_n, faiblement convergente dans $L^2(0, T; V)$ vers un élément z^*. D'après (3.4), $A(t ; u_n) z_n$ converge vers $A(t ; u^*) z^*$ dans $L^2(0, T; V')$ faible. De (3.10) on tire alors que $\frac{dz_n}{dt} \to \frac{dz^*}{dt}$ dans $L^2(0, T; V')$ faiblement, ce qui entraîne $z_n(0) \to z^*(0)$ dans H faiblement et $z_n(T) \to z^*(T)$ dans H faiblement (cf. [34]) d'où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz^*}{dt} + A(t ; u^*) z^* = \varphi \\ &z^*(0) = \varphi_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

soit $z^* = z_1(u^* ; \varphi , \varphi_0)$.

En raison de l'unicité de la limite z^*, toute la suite z_n converge faiblement dans $W(0, T)$ vers z^*. De (3.11) écrite pour $t = T$, on tire alors

$$|z_n(T)|^2 + \int_0^T < A(t ; u_n) z_n , z_n > dt \to |\varphi_0|^2 + \int_0^T < \varphi , z^* > dt \qquad (3.15)$$

soit vers $|z^*(T)|^2 + \int_0^T < A(t ; u^*) z^* , z^* > dt$.

Or $|z_n(T) - z^*(T)|^2 + \int_0^T < A(t ; u_n)(z_n - z^*) , z_n - z^* > dt = |z_n(T)|^2$

$$+ \int_0^T < A(t ; u_n) z_n , z_n > dt - 2(z_n(T) , z^*(T)) - \int_0^T < A(t ; u_n) z_n , z^* > dt$$

$$- \int_0^T < A^*(t ; u_n) z_n , z^* > dt + \int_0^T < A(t ; u_n) z^* , z^* > dt + |z^*(T)|^2 ,$$

ce qui tend vers 0 en raison de (3.4). Il suit que

$$\alpha \| z_n - z^* \|^2_{L^2(0,T;V)} \leqslant \int_0^T < A(t ; u_n)(z_n - z^*) , z_n - z^* > dt \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \qquad (3.16)$$

ce qui démontre la proposition.

3.2 - Propriétés stochastiques de l'observation.

Nous considérons la loi de probabilité image de ν sur l'espace $E \times H \times K$ et définie par l'application $\omega \overset{\Pi}{\to} \{ \xi(\omega) , z_0(\omega) , \eta(\omega) \}$.

Nous supposons que

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(\nu) \text{ est une loi de probabilité de Gauss sur } E \times H \times K \text{ d'espérance mathématique } (\overline{\xi} , \overline{z_0} , 0) \text{ et d'opérateur de covariance défini par la matrice d'opérateurs } \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

où Q et R vérifient (2.19) et (2.20) et

$P_0 \in \mathcal{L}(H; H)$ auto-adjoint, défini positif et *nucléaire.* (3.18)

Nous supposons

$\mathscr{C} \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); K)$ [1]. (3.19)

Soit $\varphi \in K$ donné quelconque. Nous avons

$$(Y(\omega; u), \varphi)_K = (\mathscr{C}\, z(\omega; u), \varphi)_K + (\eta(\omega), \varphi)_K , \qquad (3.20)$$

---

(1) ceci est tout à fait naturel dans les applications. Il est en effet rare d'observer la dérivée temporelle. Mais on peut traiter ce cas également (cf. remarque 3.2).

soit

$$\big(Y(\omega;u),\varphi\big)_K = \int_0^T < z(t;\omega;u),\ \mathscr{C}^*\varphi > dt + \big(\eta(\omega),\varphi\big)_K . \qquad (3.21)$$

Soit maintenant $p \equiv p(u,\varphi) \in W(0,T)$ solution de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp}{dt} + A^*(t;u)\,p = \mathscr{C}^*\varphi \\ &p(T) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Alors (3.21) s'écrit

$$\big(Y(\omega;u),\varphi\big)_K = \int_0^T < z(t;\omega;u), -\frac{dp}{dt} + A^*(t;u)\,p > dt + \big(\eta(\omega),\varphi\big)_K . \qquad (3.23)$$

On peut intégrer par parties le second membre de (3.23), ce qui est licite dans $W(0,T)$ (cf. [35]). On obtient

$$\big(Y(\omega;u),\varphi\big)_K = \big(\,p(0;u;\varphi), z_0(\omega)\,\big)_H \qquad (3.24)$$
$$+ \int_0^T < p(t;u,\varphi), f + B\,\xi(\omega) > dt + \big(\eta(\omega),\varphi\big)_K ,$$

soit en définitive la formule

$$\big(Y(\omega;u),\varphi\big)_K = \int_0^T < p(t;u,\varphi), f > dt + \big(\,p(0;u,\varphi), z_0(\omega)\,\big)_H$$
$$+ \big(B^*\,p(u;\varphi)\,,\,\xi(\omega)\,\big)_E + \big(\eta(\omega)\,,\,\varphi\big)_K . \qquad (3.25)$$

La formule (3.25) montre que la loi de probabilité de $Y(\omega;u)$ est, pour u fixé, une loi de probabilité de Gauss (comme pour 2.24). L'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et l'opérateur de covariance $\Lambda(u)$ sont alors définis par les formules :

$$\big(\overline{Y}(u),\varphi\big)_K = \int_0^T < f,\ p(t;u,\varphi) > dt + \big(p(0;u,\varphi), \overline{z_0}\big)_H$$
$$+ \int_0^T < B\,\overline{\xi}\,,\ p(t;u,\varphi) > dt \qquad (3.26)$$

et

$$\big(\Lambda(u)\varphi,\psi\big)_K = \big(P_0\,p(0;u,\varphi),\ p(0;u,\psi)\,\big)_H + \int_0^T dt < B\,Q\,B^*\ p(u;\varphi),\ p(t;u,\psi) >$$

Nous avons ainsi démontré $\qquad + (R\varphi\,,\,\psi) . \qquad (3.27)$

Théorème 3.1 : Hypothèses et Notations de 3.1 et 3.2. L'observation $Y(\omega;u)$ définie en 3.9, suit, pour tout u fixé dans U_0, une loi de probabilité de Gauss sur K dont l'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et l'opérateur de covariance $\Lambda(u)$ sont définis par les formules (3.26) et (3.27).

3.3 - Approximation

Les notations non redéfinies ont la même signification qu'en 2.3. Le problème de l'approximation des formules (3.26) et (3.27) se ramène à celui de la résolution numérique de (3.22). Nous supposons

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}\big(L^2(0,T;H);K\big) \qquad (3.28)$$

$$B \in \mathscr{L}\big(E;L^2(0,T;H)\big)^{(1)} . \qquad (3.29)$$

Le problème (3.22) est posé en temps décroissant. Pour des raisons de commodité, nous le ramenons à un problème en temps croissant. Pour cela posons

$$\tau = -t + T \qquad (3.30)$$

et

$$\beta(\tau) = p(t) \qquad (3.31)$$

$$g_\varphi(\tau) = \mathscr{C}^*\varphi(t) \qquad (3.32)$$

---

(1) hypothèses non essentielles - cf. note de bas de page de 2.3

Le problème (3.22) s'écrit alors

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\beta}{d\tau} + A^*(T-\tau\,;u)\,\beta = g_\varphi(\tau) \qquad \tau \in \left]0, T\right[\\ \beta(0) = 0 \\ \beta \in W(0,T). \end{array}\right\} \quad (3.33)$$

Pour $\tau \in [0,T]$ et pour u fixé dans U_0, on introduit une forme bilinéaire sur F $\tilde{a}_*(\tau; u;\, p, q)$ avec

$$\tilde{a}_*(\tau; u; \varpi p, \varpi q) = < A^*(T-\tau; u)\, p, q > \quad \forall\ p, q \in V \qquad (3.34)$$

et

$$\tau \to \tilde{a}_*(\tau; u; p, q) \text{ est mesurable } \forall\ u \in U_0;\ \forall\ p, q \in F \qquad (3.35)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u \text{ et } p_n \underset{n \to +\infty}{\to} p \text{ dans } L^2(0,T;F) \text{ faiblement, alors } \forall\ q \in L^2(0,T;F) \\ \text{on a} \\ \tilde{a}_*(\tau; u_n; p_n(\tau), q(\tau)) \to \tilde{a}_*(\tau; u; p(\tau), q(\tau)) \text{ dans } L^2(0,T). \end{array}\right\} \quad (3.36)$$

$$|\tilde{a}_*(\tau; u; p, q)| \leqslant M \|p\|_F \|q\|_F \qquad \forall\ \tau;\ \forall\ u;\ \forall\ p, q \in F \qquad (3.37)$$

$$|\tilde{a}_*(\tau; u; p, p)| \geqslant \alpha \|p\|_F^2 \qquad \forall\ u;\ \forall\ \tau;\ \forall\ p \in F;\ \alpha > 0. \qquad (3.38)$$

Nous remplaçons l'hypothèse de consistance (2.34) par les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{soit } l' \text{ une suite qui tend vers 0. Soit } \varphi \in L_1(\tilde{H})^{(1)} \text{ et } \varphi_{l'} \text{ une suite d'applications} \\ \text{de } [0,T] \to V_{l'}, \text{ telle que, lorsque } l' \to 0\ \ \chi_{l'}\, \varphi_{l'} \to \varphi \text{ dans } L_1(\tilde{H}) \text{ faiblement,} \\ \text{alors } \varphi \in L_1(H)\ (i.\,e.\ \varphi(t) \in H\ p.\,p.); \end{array}\right\} \quad (3.39)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{soit } l' \text{ une suite qui tend vers 0. Soit } \varphi_{l'} \text{ une suite d'applications de } [0,T] \to V_{l'}, \\ \text{telles que, lorsque } l' \to 0 \\ \chi_{l'}\, \varphi_{l'} \to \psi \text{ dans } L_2(\tilde{H}) \text{ faiblement} \\ \pi_{l'}\, \varphi_{l'} \to \varphi \text{ dans } L_2(F) \text{ faiblement} \\ \text{alors } \psi = P\varphi \in L_2(V) \text{ et } \varphi(t) = \varpi\, \psi(t), p.\,p\ t \in [0,T]. \end{array}\right\} \quad (3.40)$$

Nous considérons maintenant un découpage du temps

$$[0, k, 2k, \cdots Nk = T],$$

N étant un entier destiné à tendre vers l'infini.

Posons

$$a_{lk}^r(u; y_l, z_l) = \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{a}_*(\tau\ ;\ u\ ;\ \pi_l y_l\ ,\ \pi_l z_l)\, d\tau\ ;\ \forall\ y_l\ ,\ z_l \in V_l\ . \qquad (3.41)$$

et

$$g_{lk}^r(\varphi) = \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} r_l\, g_\varphi\ . \qquad (3.42)$$

Nous définissons par récurrence une suite $\beta_{lk}^r(u;\varphi)$ d'éléments de V_l par les formules :

$$\beta_{lk}^0(u;\varphi) = 0 \qquad (3.43)$$

puis β_{lk}^{r-1} étant supposé connu, β_{lk}^r est la solution de

$$\frac{1}{k}(\beta_{lk}^r - \beta_{lk}^{r-1}, \gamma_l)_l + a_{lk}^{r-1}(u; \beta_{lk}^r, \gamma_l) = (g_{lk}^{r-1}(\varphi), \gamma_l)_l\ , \qquad (3.44)$$

(1) $L_m(X)$, notation abrégée pour $L^m(0,T;X)$.

où on a posé

$$(\beta_l, \gamma_l)_l = (\chi_l \beta_l, \chi_l \gamma_l)\,. \tag{3.45}$$

Nous approximons alors la solution de (3.33) par une fonction $\beta_{lk}(\tau; u; \varphi)$ définie par :

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{uk}(\tau; u; \varphi) = \beta^r_{lk}(u; \varphi) \text{ pour } \tau \in [\, rk, (r+1)\,k\,[\\ &r = 0, \cdots N-1\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

Posons

$$\rho = (l, k), \tag{3.47}$$

et définissons

$$p_\rho(t; u, \varphi) = \chi_l \beta_{lk}(\tau; u; \varphi)\,. \tag{3.48}$$

On démontre alors [57], que la fonction $p_\rho(t; u, \varphi)$ converge vers $p(t; u, \varphi)$ dans $L^2(0, T; \hat{H})$ fortement et que $p_\rho(t; u, \varphi)$ converge vers $p(t; u, \varphi)$, dans $\hat{H}$ fortement, pour tout $t \in [\, 0, T\,]$ fixé.

Nous définissons les approximations $\overline{Y}_\rho(u)$ et $\Lambda_\rho(u)$ de $\overline{Y}(u)$ et $\Lambda(u)$ par les formules :

$$(\overline{Y}_\rho(u), \varphi)_K = \int_0^T \left(f,\, p_\rho(t; u, \varphi)\right)_H dt + \int_0^T \left(B\,\overline{\xi},\, p_\rho(t; u, \varphi)\right) dt \tag{3.49}$$

$$+ \left(p_\rho(0; u, \varphi), \overline{z}_0\right)_H \text{ (1)}$$

$$(\Lambda_\rho(u)\,\varphi, \psi)_K = \left(P_0\, p_\rho(0; u, \varphi),\, p_\rho(0; u, \psi)\right)_H + \int_0^T dt \left(B\,Q\,B^*\, p_\rho(u; \varphi),\, p_\rho(t; u, \psi)\right)$$

$$+ (R\,\varphi, \psi)_K\,. \tag{3.50}$$

Les hypothèses (5.1) et (5.2) du Chapitre I sont alors vérifiées. On se donne une famille K_h de sous espaces vectoriels de K et on pose

$$\tau_h \overline{Y}_\rho(u) = \left[\, (\overline{Y}_\rho(u), e^1_h)_K \cdots, (\overline{Y}_\rho(u), e^{N(h)}_h)\,\right] \tag{3.51}$$

$$\Lambda_{h\rho}(u) = (\Lambda_\rho(u)\, e^i_h, e^j_h)_K \qquad i, j = 1 \cdots N(h)\,. \tag{3.52}$$

L'application du Théorème 5.1 du Chapitre I donne alors

Proposition 3.2 : L'estimateur de Bayes approché

$$\hat{u}_{h\rho}(\tau_h Y) = \frac{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\, u\, e^{-\frac{1}{2}\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_\rho(u)\right)' \Lambda^{-1}_{h\rho}(u)\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_\rho(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{h\rho}(u)|}}}{\displaystyle\int_U \frac{d\mu(u)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_\rho(u)\right)' \Lambda^{-1}_{h\rho}(u)\left(\tau_h Y - \tau_h \overline{Y}_\rho(u)\right)}}{\sqrt{|\Lambda_{h\rho}(u)|}}} \tag{3.53}$$

converge fortement, lorsque $h, \rho \to 0$ vers l'estimateur de Bayes $\hat{u}(Y)$ du paramètre u du système décrit par 3.5.

3.4 - **Exemple :** *Problème de Dirichlet - Observation de l'état à l'instant* T.

Les notations non redéfinies sont les mêmes qu'en 2.4. Soit $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Nous posons $V = H^1_0(\Omega)$ et

$$< A(t; u)\, y, z > = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x, t; u_1 \cdots u_p) \frac{\delta y}{\delta x_i} \frac{\delta z}{\delta x_j}\, dx + \int_\Omega c(x, t; u_1 \cdots u_p)\, y\, z\, dx. \tag{3.54}$$

Soit $Q_T = \Omega \times\,]\, 0, T\,[$ et $\sum$ = frontière du cylindre Q_T. Nous supposons alors

$$a_{ij} \text{ et } c \in L^\infty(Q_T) \quad \forall\, u = (u_1 \cdots u_p) \in R^p \tag{3.55}$$

$$a_{ij}(x, t; u) \geqslant \alpha > 0 \text{ et } c(x, t; u) \geqslant \alpha > 0 \text{ p.p. } x; \forall\, u \in R^p \tag{3.56}$$

l'application $u \to a_{ij}$ (ou c) $i, j = 1 \cdots n$ est continue de R^p dans $L^\infty(Q_T)$. (3.57)

(1) Nous avons supposé $f \in L^2(0, T; H)$ et $B \in \mathscr{L}(E; L^2(0, T; H))$.

Le problème (3.5) est alors équivalent au problème suivant (cf. [34])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta z}{\delta t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij}(x,t;u)\frac{\delta z}{\delta x_j}\right) + c(x,t;u)\,z = f + \mathrm{B}\xi(\omega) \\ &z|_{\Sigma} = 0 \\ &z(x,0) = z_0(x,\omega)\,. \end{aligned}\right\} \quad (3.58)$$

Nous prenons comme observation

$$\mathrm{Y} \equiv \mathrm{Y}(\omega,u) = z(x,\mathrm{T};\omega;u) \in \mathrm{H}\,. \quad (3.59)$$

Pour forme $\tilde{a}_*(\tau,u;p,q)$ nous prenons (1)

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_*(\tau,u;p,q) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ji}(x,t;u)\,p_j\,q_i\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} d_i(x,t;u)\,p_0\,q_0\,dx \\ &\text{pour } p = [\,p_0, p_1 \cdots p_n\,];\ q = [\,q_0, q_1 \cdots q_n\,] \in \mathrm{F} \\ &d_i(x,t;u) = c_i(x,t;u) \text{ pour } x \in \Omega \text{ et } \alpha \text{ si } x \notin \Omega\,. \end{aligned}\right\} \quad (3.60)$$

Nous devons définir maintenant l'espace discrétisé des observations. L'espace K des observations est H. Nous prenons pour K_h l'ensemble des fonctions étagées

$$\mathrm{K}_h = \{\, y_h \mid y_h(x) = \sum_{\mathrm{M} \in \Omega_h^0} y_h(\mathrm{M})\,\mathrm{W}_{h\mathrm{M}}(x) \,\}\,. \quad (3.61)$$

Une base de K_h est l'ensemble des vecteurs

$$e_h^{\mathrm{M}} = e_h^{\mathrm{M}}(x) = \frac{\mathrm{W}_{h\mathrm{M}}(x)}{\sqrt{mes\,(\Omega \cap \sigma_h(\mathrm{M};0))}} \qquad \mathrm{M} \in \Omega_h^0\,. \quad (3.62)$$

Nous devons maintenant calculer $(\overline{\mathrm{Y}}_\rho(u), e_h^{\mathrm{M}})_{\mathrm{K}}$ et $(\Lambda_\rho(u)\,e_h^{\mathrm{M}}, e_h^{\mathrm{P}})_{\mathrm{K}}$ pour $\mathrm{M}, \mathrm{P} \in \Omega_h^0$. Les formules (3.49) et (3.50) donnent alors

$$\begin{aligned} (\overline{\mathrm{Y}}_\rho(u), e_h^{\mathrm{M}}) = &\sum_{\mathrm{Q} \in \Omega_l^1} \beta_\rho^{\mathrm{N},\mathrm{Q}}(u; e_h^{\mathrm{M}})\,(\overline{z_0}, \mathrm{W}_{l\mathrm{Q}})_{\mathrm{H}} + \sum_{\mathrm{Q} \in \Omega_l^1} \sum_{r=0}^{\mathrm{N}-1} \beta_\rho^{\mathrm{N}-r,\mathrm{Q}}(u; e_h^{\mathrm{M}}) \\ &(\mathrm{W}_{l\mathrm{Q}}, \int_{rk}^{(r+1)k} (f + \mathrm{B}\,\overline{\xi})\,dt)_{\mathrm{H}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\left.\begin{aligned} (\Lambda_\rho(u)\,e_h^{\mathrm{M}}, e_h^{\mathrm{P}}) = &\sum_{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 \in \Omega_l^1} \beta_\rho^{\mathrm{N},\mathrm{Q}_1}(u; e_h^{\mathrm{M}})\,\beta_\rho^{\mathrm{N},\mathrm{Q}_2}(u; e_h^{\mathrm{P}})\,(\mathrm{P}_0\,\mathrm{W}_{l\mathrm{Q}_1}, \mathrm{W}_{l\mathrm{Q}_2})_{\mathrm{H}} \\ &+ \sum_{r=0}^{\mathrm{N}-1} \sum_{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 \in \Omega_l^1} \beta_\rho^{\mathrm{N}-r,\mathrm{Q}_1}(u; e_h^{\mathrm{M}})\,\beta_\rho^{\mathrm{N}-r,\mathrm{Q}_2}(u; e_h^{\mathrm{P}}) \int_{rk}^{(r+1)k} (\mathrm{B}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{B}^*\,\mathrm{W}_{l\mathrm{Q}_1}, \mathrm{W}_{l\mathrm{Q}_2})_{\mathrm{H}}^{dt} \\ &+ (\mathrm{R}\,e_h^{\mathrm{M}}, e_h^{\mathrm{P}})_{\mathrm{K}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (3.64)$$

Les quantités $\beta_\rho^{s,\mathrm{Q}}(u; e_h^{\mathrm{M}})$, $s = 0 \cdots \mathrm{N}-1$ et $\mathrm{Q} \in \Omega_l^1$ étant fournies à l'aide de (3.44), soit :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{k}(\beta_\rho^{s,\mathrm{Q}} - \beta_\rho^{s-1,\mathrm{Q}}) + \sum_{\mathrm{Q}_1 \in \Omega_l^1} a_\rho^{s-1}(\mathrm{W}_{l\mathrm{Q}_1}, \mathrm{W}_{l\mathrm{Q}}) \times \beta_\rho^{s,\mathrm{Q}_1} = (g_\rho^{s-1}(e_h^{\mathrm{M}}), \mathrm{W}_{l\mathrm{Q}})_l \\ &\beta_\rho^{0,\mathrm{Q}} = 0 \ \ \forall\, \mathrm{Q} \in \Omega_l^1\,. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(3.65) \\ &(3.66) \end{aligned}$$

Comme dans le cas elliptique, la matrice du premier membre de (3.65) qui fournit $\beta_\rho^{s,\mathrm{Q}}(u; e_h^{\mathrm{M}})$, $\mathrm{Q} \in \Omega_l^1$, connaissant $\beta_\rho^{s-1,\mathrm{Q}}(u; e_h^{\mathrm{M}})$, $\mathrm{Q} \in \Omega_l^1$ est indépendante de $\mathrm{M} \in \Omega_h^0$, ce qui simplifie beaucoup les calculs.

---

(1) nous rappelons que $\tau = -t + \mathrm{T}$.

Remarque 3.1 : Comme pour la remarque 2.2, on peut considérer bien d'autres observations. On peut par exemple prendre $K = L^2(\Sigma)$. Alors $\mathscr{C} \equiv \mathscr{C}(t) = \gamma$ pour $t \in [0, T]$. Soit $q \in W(0, T)$ avec $q(0) = 0$. On tire de (3.22)

$$\int_0^T < q, -\frac{dp}{dt} + A^*(t; u)\, p > dt = + \int_0^T < p, \frac{dq}{dt} > dt + \int_0^T < A^*(t; u)\, p, q > dt$$

$$= \int_0^T dt \left(\varphi(t), \gamma\, q(t)\right)_{L^2(\Gamma)}, \tag{3.67}$$

ce qui s'interprète par les méthodes de LIONS-MAGENES [37], comme le système

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\delta p}{\delta t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ji}(x, t; u)\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) + c(x, t; u)\, p = 0 \\ &\frac{\delta p}{\delta \nu_{A^*}(u)}\bigg|_{\Sigma} = \varphi(t) \\ &p(T) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

On est alors ramené à l'intégration numérique du système (3.68). Ce problème se résoud par les méthodes de RAVIART [49] ou TEMAN [57].

Remarque 3.3 : Analogue à la remarque 2.3. On peut considérer d'autres types d'entrée stochastique, par exemple

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta z}{\delta t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij}(x, t; u)\frac{\delta z}{\delta x_j}\right) + c(x, t; u)\, z = B\, \xi_1(\omega) \\ &z|_{\Sigma} = \xi_2(\omega) \\ &z(0) = z_0(\omega)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

Il faut utiliser la théorie des problèmes aux limites non homogènes [37].

4 - Système gouverné par des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique ou bien posé au sens de Petrowsky.

4.1 - Hypothèses - Notations.

Les symboles communs avec le numéro 3.1 ne seront pas redéfinis. Nous considérons une famille $A(u)$, $u \in U_0$ d'opérateurs $\in \mathscr{L}(V; V')$ vérifiant

$$\sup_u \| A(u) \|_{\mathscr{L}(V; V')} \text{ borné} \tag{4.1}$$

$$< A(u)\, \varphi, \psi > = < A(u)\, \psi, \varphi >, \ \forall\, \varphi, \psi \in V;\ \forall\, u \in U_0\,. \tag{4.2}$$

$$< A(u)\, \varphi, \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2 \ ;\ \forall\, \varphi \in V;\ \alpha > 0 \ (1) \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Si } \varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} \varphi \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faiblement et } u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u \text{ alors} \\ &A(u_n)\, \varphi_n \to A(u)\, \varphi \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faiblement } (2). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

L'état $z \equiv z(\omega; u)$ du système est alors défini par le modèle

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 z}{dt^2} + A(u)\, z = f + B\, \xi(\omega) \\ &z(0) = z_0(\omega) \\ &z'(0) = z_1(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

(1) En fait, il suffit qu'il existe λ tel que $< A(u)\, \varphi, \varphi > + \lambda |\varphi|_H^2 \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2$

(2) cf. note de bas de page de 2.1.

avec $z \in L^2(0, T; V)$, $\frac{dz}{dt} \in L^2(0, T; H)$. On suppose que

$$f \in L^2(0, T; H) ; B \equiv B(t) \in \mathscr{L}\left(E; L^2(0, T; H)\right) \tag{4.6}$$

$z_0(\omega)$ est une variable aléatoire à valeur dans V (4.7)

$z_1(\omega)$ est une variable aléatoire à valeur dans H. (4.8)

Pour ω et u fixés, on démontre (cf. [34]) que z est une fonction continue de $[0, T] \to V$, et $\frac{dz}{dt}$ est une fonction continue de $[0, T] \to H$.

L'observation $Y \equiv Y(\omega ; u)$ est alors définie par

$$Y(\omega ; u) = \mathscr{C} z(\omega ; u) + \eta(\omega) \tag{4.9}$$

où $\mathscr{C} \in \mathscr{L}\left(L^2(0, T; H) ; K\right)$ (1) et $\eta(\omega)$ variable aléatoire à valeur dans K.

Nous avons alors

Proposition 4.1 : L'observation $Y(\omega ; u)$ est une variable aléatoire à valeur dans K et définie sur l'espace $\underline{\omega} \times U$ muni de la loi de probabilité $\rho = \nu \otimes \mu$.

Démonstration : Il existe un compact $C_0 \subset \underline{\omega} \times U$ de mesure $\rho(C_0) > 1 - \epsilon$ sur lequel l'application $(u, \omega) \overset{\gamma_1}{\to} \left(u, B\xi(\omega) + f, z_0(\omega), z_1(\omega)\right)$ est continue $\to U \times L^2(0, T; H) \times V \times H$. Or l'application $(u, \omega) \to z(\omega ; u)$ définie par (4.5) est composée de γ_1 par $\gamma_2 : U \times L^2(0, T; H) \times V \times H \to L^2(0, T; H)$ définie par $z_1 \equiv z_1(u ; \varphi, \varphi_0, \varphi_1)$ solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 z_1}{dt^2} + A(u) z_1 = \varphi \\ &z_1(0) = \varphi_0 \\ &z'_1(0) = \varphi_1 . \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Il suffit de montrer que γ_2 est continue. Soit $u_n, \varphi_n, \varphi_{0n}, \varphi_{1n}$ une suite convergente vers $u, \varphi, \varphi_0, \varphi_1$ et soit $z_n \equiv z_1(u_n ; \varphi_n, \varphi_{0n}, \varphi_{1n})$. On déduit de (4.10)

$$\frac{d}{dt}|z'_n(t)|^2 + \langle A(u_n) z_n, z'_n \rangle + \langle A(u_n) z'_n, z_n \rangle = \tag{4.11}$$

$$2(\varphi_n, z'_n)_H ,$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\langle A(u_n) z_n, z_n \rangle + |z'_n(t)|^2\right) = 2(\varphi_n, z'_n)_H . \tag{4.12}$$

En intégrant (4.12) entre 0 et t, il vient

$$\langle A(u_n) z_n(t), z_n(t) \rangle + |z'_n(t)|^2 = |\varphi_{1n}|^2 + 2\int_0^t (\varphi_n, z'_n(\sigma))_H \, d\sigma \tag{4.13}$$

d'où on déduit

$$\alpha \| z_n(t) \|_V^2 + |z'_n(t)|_H^2 \leqslant C_1\left(|\varphi_1|^2 + \int_0^T |\varphi|^2 \, dt\right) \tag{4.14}$$

$$+ C_2 \left\{ \int_0^t \left(\| z_n(\sigma) \|^2 + |z'_n(\sigma)|^2 \right) d\sigma \right\} ,$$

C_1 et C_2 étant des constantes convenables. En utilisant le lemme de Gronwall, (4.14) entraîne

$$\| z_n(t) \|_V^2 + |z'_n(t)|_H^2 \leqslant C_3\left(|\varphi_1|^2 + \int_0^T |\varphi|^2 \, dt\right) , \tag{4.15}$$

---

(1) Pour fixer les idées.

d'où on déduit que z_n demeure dans un borné de L^2 (0, T; V) (par exemple) et que z'_n demeure dans un borné de L^2 (0, T; H) lorsque $n \to +\infty$. Soit, encore notée z_n, une sous suite quelconque extraite telle que

$$z_n \to z^* \text{ faiblement dans } L^2 (0, T; V) \tag{4.16}$$

$$z'_n \to z_1^* \text{ faiblement dans } L^2 (0, T; H). \tag{4.17}$$

On a alors $z_1^* = \dfrac{dz^*}{dt}$. Soit $\psi \in L^2 (0, T; V)$, telle que $\psi' \in L^2 (0, T; H)$ et $\psi (T) = 0$. L'équation (4.10) s'écrit alors

$$\int_0^T < A (u_n) z_n , \psi > dt - \int_0^T (z'_n , \psi') \, dt \tag{4.18}$$

$$= (\varphi_{1n} , \psi (0)) + \int_0^T (\varphi_n (t) , \psi) \, dt.$$

Grâce à l'hypothèse (4.4), on peut passer à la limite dans (4.18). Il vient

$$\int_0^T < A (u^*) z^* , \psi > dt \tag{4.19}$$

$$- \int_0^T \left(\frac{dz^*}{dt} , \psi^* \right) dt = (\varphi_1 , \psi (0)) + \int_0^T (\varphi (t) , \psi) \, dt ,$$

ce qui est équivalent à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 z^*}{dt^2} + A (u^*) z^* = \varphi \\ &\qquad z'^* (0) = \varphi_1 . \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

D'autre part, de (4.16) et (4.17) il suit que $z_n (0) \to z^* (0)$ dans H faible. Or d'après (4.10), $z_n (0) \to \varphi_0$ dans V fort, donc

$$z^* (0) = \varphi_0 \in V. \tag{4.21}$$

Il suit alors de (4.20) et (4.21) que $z^* = z_1$ et en raison de l'unicité de la limite toute la suite

$$z_n \to z^* \text{ faiblement dans } L^2 (0, T; V) \tag{4.22}$$

$$z'_n \to (z^*)' \text{ faiblement dans } L^2 (0, T; H). \tag{4.23}$$

Montrons maintenant la convergence forte de z_n vers z^*. De (4.13), il suit que

$$< A (u_n) z_n (t) , z_n (t) > + | z'_n (t) |^2 \to | \varphi_1 |^2 + 2 \int_0^T (\varphi (t) , z^*) \, d\sigma , \tag{4.24}$$

soit

$$< A (u_n) z_n (t) , z_n (t) > + | z'_n (t) |^2 \to | z^{*\prime} (t) |^2 + < A (u^*) z^* (t) , z^* (t) > . \tag{4.25}$$

Donc d'après le théorème de Lebesgue

$$\int_0^T \{ < A (u_n) z_n (t) , z_n (t) > + | z'_n (t) |^2 \} \, dt \to \int_0^T dt \{ < A (u^*) z^* , z^* > + | z^{*\prime} (t) |^2 \} . \tag{4.26}$$

Or on a

$$\int_0^T < A (u_n) (z_n - z^*) , z_n - z^* > dt + \int_0^T | z'_n - z^{*\prime} |^2 \, dt$$

$$= \int_0^T dt \{ < A (u_n) z_n , z_n > + | z'_n (t) |^2$$

$$- 2 \int_0^T < A (u_n) z_n , z^* > dt + \int_0^T < A (u_n) z^* , z^* > dt$$

$$+ \int_0^T | z^{*\prime} |^2 \, dt - 2 \int_0^T (z'_n , z^{*\prime}) \, dt .$$

Le membre de droite, d'après (4.26), (4.22), (4.23) et l'hypothèse (4.4) tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Il suit que

$$\alpha \| z_n - z^* \|^2_{L^2(0,T;V)} \leqslant \int_0^T < A(u_n)(z_n - z^*), z_n - z^* > dt \underset{n \to +\infty}{\to} 0 , \qquad (4.27)$$

ce qui démontre la proposition.

4.2 - **Propriétés stochastiques de l'observation.**

Nous considérons la loi de probabilité image de ν sur l'espace $E \times V \times H \times K$ et définie par l'application $\omega \overset{\pi}{\to} \{ \xi(\omega), z_0(\omega), z_1(\omega), \eta(\omega) \}$.

Nous supposons que

$\pi(\nu)$ est une loi de probabilité de Gauss sur $E \times V \times H \times K$ d'espérance mathématique $(\bar{\xi}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, 0)$ et d'opérateur de covariance défini par la matrice d'opérateurs (4.28)

$$\begin{Vmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{Vmatrix}$$

Q et R vérifient (2.19) et (2.20) et

$P_0 \in \mathscr{L}(V; V)$ autoadjoint, défini positif et *nucléaire.* (4.29)

$P_1 \in \mathscr{L}(H; H)$ autoadjoint, défini positif et *nucléaire.* (4.30)

Soit $\varphi \in K$ donné quelconque. Nous avons

$$(Y(\omega; u), \varphi)_K = (\mathscr{C} z(\omega; u), \varphi)_K + (\eta(\omega), \varphi)_K , \qquad (4.31)$$

soit

$$(Y(\omega; u), \varphi)_K = \int_0^T (z(t; \omega; u), \mathscr{C}^*(t)\varphi)\, dt + (\eta(\omega), \varphi)_K . \qquad (4.32)$$

Soit maintenant $p \equiv p(u, \varphi)$ solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 p}{dt^2} + A(u)\, p = \mathscr{C}^*(t)\varphi \\ &p(T) = 0 \\ &p'(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.33)$$

$p \in L^2(0, T; V)$ et $p' \in L^2(0, T; V')$. Nous utilisons alors la formule d'intégration par parties suivante (qui est valide cf. [37]). Si φ et $\psi \in L^2(0, T; V)$ sont telles que $\varphi', \psi' \in L^2(0, T; H)$ et $\varphi'', \psi'' \in L^2(0, T; V')$ alors on a :

$$\int_0^T < \varphi, \frac{d^2\psi}{dt^2} > dt = (\psi'(T), \varphi(T))_H - (\psi'(0), \varphi(0))_H - (\psi(T), \varphi'(T))_H$$

$$+ (\psi(0), \varphi'(0))_H + \int_0^T < \psi, \frac{d^2\varphi}{dt^2} > dt . \qquad (4.34)$$

On a alors

$$\int_0^T (z, \mathscr{C}^*\varphi)\, dt = \int_0^T \left(z, \frac{d^2 p}{dt^2} + A(u)\, p \right) dt = \int_0^T < A(u) z,\ p > dt$$

$$- (p'(0), z_0(\omega))_H + (p(0), z_1(\omega))_H + \int_0^T < p, \frac{d^2 z}{dt^2} > dt . \qquad (4.35)$$

Si J_V désigne l'isomorphisme canonique de V dans son dual, (4.35) s'écrit alors

$$\int_0^T (z, \mathscr{C}^* \varphi)\, dt = -\left(\left(J_V^{-1}\ p'(0), z_0(\omega) \right) \right)_V + \left(p(0), z_1(\omega) \right)_H + \int_0^T \left(p, f + B\,\xi(\omega) \right)_H dt\,, \tag{4.36}$$

d'où en définitive la formule

$$\left(Y(\omega; u), \varphi\right)_K = -\left(\left(J_V^{-1}\ p'(0; u; \varphi), z_0(\omega) \right) \right)_V + \left(p(0; u; \varphi), z_1(\omega) \right)_H + \left(B^*\ p(u; \varphi), \xi(\omega)\right)_E + \int_0^T \left(p(t; u; \varphi), f(t) \right)_H dt + \left(\eta(\omega), \varphi\right)_K . \tag{4.37}$$

La formule (4.37) montre que la loi de probabilité de $Y(\omega; u)$ est pour u fixé une loi de probabilité de Gauss. L'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et l'opérateur de covariance $\Lambda(u)$ sont alors définis par les formules

$$\left(\overline{Y}(u), \varphi\right)_K = -\left(p'(0; u; \varphi), \overline{z_0} \right)_H + \left(p(0; u; \varphi), \overline{z_1} \right)_H + \int_0^T \left(B\,\overline{\xi}\,,\ p(t; u; \varphi) \right)_H dt + \int_0^T \left(p(t; u; \varphi)\,,\ f(t) \right)_H dt \tag{4.38}$$

et

$$\left(\Lambda(u)\,\varphi, \psi\right)_K = \left(\left(P_0 J_V^{\ 1}\ p'(0; u; \varphi), J_V^{-1}\ p'(0; u; \psi) \right) \right)_V + \left(P_1\ p(0; u; \varphi),\ p(0; u; \psi) \right)_H + \int_0^T \left(B Q B^*\ p(t; u; \varphi)\,,\ p(t; u; \psi) \right)_H dt + \left(R\,\varphi\,, \psi\right)_K , \tag{4.39}$$

ou encore

$$\left(\Lambda(u)\,\varphi, \psi\right)_K = \left(P_0 J_V^{-1}\ p'(0; u; \varphi),\ p'(0; u; \psi) \right)_H + \left(P_1\ p(0; u; \varphi),\ p(0; u; \psi) \right)_H + \int_0^T \left(B\,Q\,B^*\ p(t; u; \varphi),\ p(t; u; \psi) \right)_H dt + \left(R\,\varphi\,, \psi\right)_K . \tag{4.40}$$

Nous avons ainsi démontré

Théorème 4.1 : Hypothèses et Notations de 4.1 et 4.2. L'observation $Y(\omega; u)$ définie en (4.9), suit pour tout u fixé dans U_0, une loi de probabilité de Gauss sur K dont l'espérance mathématique $\overline{Y}(u)$ et l'opérateur de covariance $\Lambda(u)$ sont définis par les formules (4.39) et (4.40).

4.3 - Remarques

Remarque 4.1 : L'approximation peut se traiter comme les numéros 2.3 et 3.3 en utilisant les méthodes d'analyse numérique d'intégration de (4.33), pour lesquelles nous renvoyons à RAVIART [49] et TEMAM [57].

Remarque 4.2 : Dans les exemples, si A est un opérateur différentiel du second ordre, on a affaire à un système régi par une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique. Si A est d'ordre $2\,m$ avec $m > 1$, on a affaire à un système régi par une équation aux dérivées partielles de type « bien posé » au sens de Petrowsky (cf. [37]).

Remarque 4.3 : analogue aux remarques 3.2 et 3.3. On peut considérer de nombreux types d'observation et également de nombreux types d'entrée stochastique, en particulier sur la surface du domaine.

§ 2 : Application de l'estimation au sens des moindres carrés.

Orientation : Nous allons dans ce paragraphe appliquer le critère (7.2) du Chapitre I. Nous supposerons que l'espace de Hilbert K des observations est identifié à son dual. Une théorie totalement générale étant pour le moment très difficile à faire, nous étudierons un certain nombre de modèles assez généraux successivement. Les modèles envisagés seront les mêmes que ceux étudiés par J.-L. LIONS [35] pour le contrôle non linéaire.

2.A : Le modèle elliptique « bilinéaire ».

5. - Le problème vrai et le problème régularisé.

5.1 - Hypothèses - Notations.

Soit Ω un ouvert borné de R^n, de frontière Γ; $H = L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces définis en 2.4 et 3.4. On introduit l'opérateur elliptique du second ordre A défini par :

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\delta}{\delta x_j}\varphi\right) + a_0(x)\varphi \;;\; \forall \varphi \in H^1(\Omega) \qquad (5.1)$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega) \;\; \forall\, i,j = 1 \ldots n \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) \;;\; \alpha > 0 \qquad p.p. \text{ dans } \Omega \\ a_0(x) \geqslant \alpha \qquad p.p. \end{array}\right\} \qquad (5.2)$$

On pose

$$\mathscr{U}_+ = \{\, v \mid v \in L^\infty(\Omega)\,,\, v \geqslant 0 \qquad p.p. \text{ dans } \Omega \,\}\,. \qquad (5.3)$$

On munit $L^\infty(\Omega)$ de la topologie de dual faible de $L^1(\Omega)$: $\mathscr{U}_+$ est alors un convexe fermé de $L^\infty(\Omega)$. Nous considérons le modèle

$$\left.\begin{array}{l} Ay + vy = f \qquad p.p. \text{ dans } \Omega \;;\; f \in H \\ y \in H_0^1(\Omega)\,. \end{array}\right\} \qquad (5.4)$$

Pour tout $v \in \mathscr{U}_+$ le modèle (5.4) définit bien (cf. [34]) un élément y de $H_0^1(\Omega)$ et un seul $(y \equiv y(v))$. Nous supposons que v est non connu dans $\mathscr{U}_+$, mais conformément au n° 7 du Chapitre I v est déterministe. Le problème consiste à identifier v et pour cela on dispose d'une *observation* z de la forme

$$z = \mathscr{C}y + \eta \qquad (5.5)$$

où

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}(H_0^1 ; K) \;;\; K \text{ espace de Hilbert des observations.} \qquad (5.6)$$

La grandeur η représente « l'erreur d'observation » et nous ferons sur elle alternativement deux hypothèses :

Hypothèse A : Pas d'erreur, $\eta \equiv 0$

Hypothèse B : L'erreur d'observation est caractérisée par la donnée d'une mesure cylindrique sur K, d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance $\Lambda \in \mathscr{L}(K; K)$, auto-adjoint, défini positif et *inversible* (elle est donc du type bruit blanc).

Remarque 5.1 : La terminologie « bilinéaire » provient du fait que l'application $\{v, y\} \to v\, y$ est bilinéaire.

Remarque 5.2 : On peut adapter les résultats sur le modèle bilinéaire
- aux autres conditions aux limites que celles définies par 5.4, à condition que pour v fixé on ait un problème bien posé;
- au cas où A est elliptique d'ordre > 2 ■

Dans le cas de l'hypothèse B le critère des moindres carrés se définit par

$$J(v) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y(v)), z_d - \mathscr{C}\, y(v)\right)_K ; z_d \text{ donné dans K.} \qquad (5.7)$$

Il s'agit alors de minimiser J (v) sur $\mathscr{U}^+$. En général, la borne inférieure de J (v) sur $\mathscr{U}^+$ n'est pas atteinte et on se contente de définir des suites *minimisantes* pour J (v).

Dans le cas de l'hypothèse A, il est raisonnable de supposer que l'ensemble

$$X = \{ v \in \mathscr{U}^+ \mid z_d = \mathscr{C}\, y(v) \} \text{ est non vide.} \qquad (5.8)$$

On prend alors comme fonctionnelle à minimiser

$$J^1(v) = \| z_d - \mathscr{C}\, y(v) \|^2_K \qquad (5.9)$$

La borne inférieure de $J^1(v)$ est nulle et elle est atteinte pour tous les points de X.

5.2 - Régularisation.

L'idée de la régularisation consiste à introduire la fonctionnelle [1] (5.10)

$$J_\lambda(v) = J(v) + \lambda \| v \|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On sait alors (cf. [35]) qu'il existe un élément v_λ de $\mathscr{U}^+$, non forcément unique, tel que

$$J_\lambda(v_\lambda) = \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v). \qquad (5.11)$$

Nous avons alors

Proposition 5.1 : toute suite v_λ définie par (5.11) est une suite minimisante pour la fonctionnelle J (v), définie en (5.7).

Démonstration : Nous devons montrer que

$$J(v_\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}^+} J(v). \qquad (5.12)$$

Soit v_n une suite minimisante pour J (v). Alors, $\forall\, \epsilon > 0$ arbitraire, il existe N (ϵ) tel que pour $n \geqslant N(\epsilon)$, on ait :

$$\inf_{v \in \mathscr{U}^+} J(v) \leqslant J(v_n) \leqslant \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v) + \frac{\epsilon}{2} \qquad (5.13)$$

Par conséquent

$$J_\lambda(v_\lambda) \leqslant J_\lambda(v_{N(\epsilon)}) = J(v_{N(\epsilon)}) + \lambda \| v_{N(\epsilon)} \|_{L^\infty(\Omega)} \qquad (5.14)$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \lambda \| v_{N(\epsilon)} \|_{L^\infty(\Omega)} + \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v).$$

(1) Pour des détails sur la méthode de régularisation nous renvoyons à [35] et [11].

Or

$$J_\lambda (v_\lambda) = \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v) + \lambda \| v \|_{L^\infty(\Omega)} \geqslant \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v). \tag{5.15}$$

Donc, en prenant

$$\lambda < \eta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2 \| v_{N(\epsilon)} \|_{L^\infty(\Omega)}}, \tag{5.16}$$

il vient

$$\inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v) \leqslant J_\lambda (v_\lambda) \leqslant \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v) + \epsilon, \tag{5.17}$$

ce qui prouve que $J_\lambda (v_\lambda) \to \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v)$ lorsque $\lambda \to 0$. Il en est de même pour $J(v_\lambda)$ car

$$\inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v) \leqslant J(v_\lambda) \leqslant J_\lambda (v_\lambda) \tag{5.18}$$

Nous pouvons aussi régulariser la fonctionnelle $J^1(v)$ en définissant

$$J^1_\mu (v) = J^1(v) + \mu \| v \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.19}$$

Il existe alors un élément v_μ non unique réalisant la borne inférieure de $J^1_\mu (v)$. Nous avons alors :

Proposition 5.2 : toute suite v_μ vérifiant

$$J^1_\mu (v_\mu) = \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J^1_\mu (v) \tag{5.20}$$

est une suite minimisante pour $J^1(v)$. De plus

$$\| v_\mu \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{Constante lorsque } \mu \to 0; \tag{5.21}$$

Si on extrait une sous-suite, encore notée v_μ, convergeant vers v^* dans $L^\infty(\Omega)$ (muni de la topologie de dual faible de $L^1(\Omega)$), alors on a $\| v^* \|_{L^\infty(\Omega)}$ (5.22)

$$= \inf_{v \in X} \| v \|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Démonstration : Il est clair (la démonstration est la même que celle de la proposition 5.1) que v_μ est une suite minimisante pour $J^1(v)$. Montrons alors (5.21).

Soit v_0 un élément de X. Nous avons

$$J^1_\mu (v_\mu) = \mu \| v_\mu \|_{L^\infty(\Omega)} + \| z_d - \mathscr{C} y(v_\mu) \|^2_K \tag{5.23}$$

$$\leqslant \mu \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)};$$

D'où il résulte (puisque v_0 est quelconque dans X)

$$\| v_\mu \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \inf_{v \in X} \| v \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.24}$$

D'autre part, en raison de la coercivité de A et du fait que $v_\mu \in \mathscr{U}_+$, il clair que

$$\| y(v_\mu) \|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \text{Constante.} \tag{5.25}$$

Soit une sous-suite extraite, encore notée $\{ y_\mu = y(v_\mu), v_\mu \}$ telle que

$$y_\mu \underset{\mu \to 0}{\to} y^* \quad \text{dans} \quad H^1_0(\Omega) \text{ faiblement} \tag{5.26}$$

$$v_\mu \to v^* \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ (pour la topologie de dual faible de } L^1(\Omega)). \tag{5.27}$$

Montrons que $y^* = y(v^*)$. En effet

$$A y_\mu + v_\mu y_\mu = f. \tag{5.28}$$

D'après (5.26) $A y_\mu \to A y^*$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Il suffit donc de montrer que

$$v_\mu y_\mu \to v^* y^* \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{5.29}$$

En effet, si (5.29) est vrai, il suit que

$$A y^* + v^* y^* = f \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ et } y^* \in H_0^1(\Omega), \tag{5.30}$$

donc $y^* = y(v^*)$.

Pour démontrer (5.29) nous utilisons le fait que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (cf. par exemple [36]). Il en résulte, grâce à (5.26) que

$$y_\mu \to y^* \textit{ fortement} \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{5.31}$$

Donc si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on peut écrire

$$\int_\Omega v_\mu y_\mu \varphi \, dx = \int_\Omega v_\mu y^* \varphi \, dx + \int_\Omega v_\mu (y_\mu - y^*) \varphi \, dx \to \int_\Omega v^* y^* \varphi \, dx,$$

d'où (5.29). On a alors

$$z_d - \mathscr{C} y(v_\mu) \to z_d - \mathscr{C} y(v^*) \text{ faiblement dans K}, \tag{5.32}$$

et

$$\| z_d - \mathscr{C} y(v^*) \|_K \leqslant \liminf_{\mu \to 0} \| z_d - \mathscr{C} y(v_\mu) \|_K = 0 \tag{5.33}$$

donc $v^* \in X$.

De (5.24), on tire alors

$$\| v^* \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \liminf_{\mu \to 0} \| v_\mu \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \inf_{v \in X} \| v \|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{5.34}$$

Ce qui démontre (5.22).

Remarque 5.3 : Pour la fonctionnelle $J(v)$ la régularisation permet de définir des suites minimisantes. Pour la fonctionnelle $J^1(v)$, la régularisation permet, parmi les éléments de X, de choisir ceux de norme minimale.

6. Pénalisation :

6.1. Le problème pénalisé.

La méthode de pénalisation [1] consiste à considérer l'équation (5.4) comme une contrainte et à l'introduire dans le critère. Posons

$$Y = \{ y \in H_0^1(\Omega) \mid A y \in L^2(\Omega) \}^{(2)}. \tag{6.1}$$

Introduisons la fonctionnelle $J_{\epsilon,\lambda}(y, v)$ définie par

$$J_{\epsilon,\lambda}(y, v) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y), z_d - \mathscr{C} y\right)_K + \lambda \| v \|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon} | A y + v y - f |^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.2}$$

Nous avons

(1) Pour des détails sur cette méthode, nous renvoyons à [35], [11].
(2) $Y = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, si les coefficients de A et la frontière Γ sont assez réguliers.

Théorème 6.1 : Hypothèses et Notations de 5.1. Il existe un couple, non forcément unique $y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}$ tel que

$$J_{\epsilon,\lambda}(y_{\epsilon,\lambda}, v_{\epsilon,\lambda}) = \inf_{y \in Y;\, v \in \mathscr{U}_+} J_{\epsilon\lambda}(y, v). \tag{6.3}$$

Démonstration : Soit v_n , y_n une suite minimisante pour $J_{\epsilon\lambda}$ $(y$, $v)$. Du fait que $J_{\epsilon\lambda}(y_n, v_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \inf J_{\epsilon\lambda}(y, v)$, il résulte grâce à (6.2) que

$$\| v_n \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{Constante} \tag{6.4}$$

$$| A y_n + v_n y_n - f |^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \text{Constante} \tag{6.5}$$

De (6.5) il résulte encore

$$| A y_n + v_n y_n |^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \text{Constante} \tag{6.6}$$

Posons

$$\xi_n = A y_n + v_n y_n, \tag{6.7}$$

soit

$$(\xi_n, y_n)_{L^2(\Omega)} = (A y_n, y_n) + (v_n y_n, y_n)_{L^2(\Omega)}. \tag{6.8}$$

Puisque $v_n \in \mathscr{U}_+$ et en raison de (5.2), il vient après utilisation de la formule de Green[1]

$$\alpha \| y_n \|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant (\xi_n, y_n)_{L^2(\Omega)} \leqslant \text{Cte} \| y_n \|_{H^1_0(\Omega)}, \tag{6.9}$$

soit $\| y_n \|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant$ Constante. On peut alors extraire de (v_n, y_n) une sous-suite, notée de façon identique, telle que

$$y_n \to y^* \quad \text{faiblement dans} \quad H^1_0(\Omega) \tag{6.10}$$

$$v_n \to v^* \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega) \text{ dual faible de } L^1(\Omega). \tag{6.11}$$

De (6.10) et du fait que l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, il résulte

$$y_n \to y^* \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega). \tag{6.12}$$

Nous pouvons toujours supposer, quitte à extraire une nouvelle sous-suite que

$$\xi_n \to \xi^* \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega). \tag{6.13}$$

Comme pour la proposition 5.2 $v_n y_n \to v^* y^*$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Donc $A y_n + v_n y_n \to A y^* + v^* y^*$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, soit

$$\xi^* = A y^* + v^* y^*, \tag{6.14}$$

ce qui entraîne $y^* \in Y$. Nous avons alors

$$J_{\epsilon\lambda}(y^*, v^*) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} J_{\epsilon\lambda}(y_n, v_n) = \inf_{y,\, v} J_{\epsilon\lambda}(y, v), \tag{6.15}$$

d'où il résulte (6.3).

---

(1) $(A\varphi, \psi) = \sum_{ij=1} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + a_0 \int_\Omega \varphi \psi \, dx$ si $\varphi, \psi \in H^1_0(\Omega)$

Remarque 6.1 : Le théorème 6.1 s'applique aussi à la fonctionnelle

$$J^1_{\epsilon\lambda}(y, v) = \| z_d - \mathscr{C} y \|^2_K + \lambda \| v \|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon} | Ay + vy - f |^2. \tag{6.16}$$

6.2. Convergence lorsque $\epsilon \to 0$

Théorème 6.2 : Hypothèses et notations de 5.1 et 6.1. *Lorsque* $\epsilon \to 0$, les suites $y_{\epsilon\lambda}$, $v_{\epsilon\lambda}$ définies par (6.3) vérifient :

$$J_\lambda(v_{\epsilon\lambda}) \underset{\epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v) \tag{6.17}$$

$(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ demeure dans un borné de $H^1_0(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ lorsque $\epsilon \to 0$ (6.18)

Soit, encore notée $y_{\epsilon\lambda}$, $v_{\epsilon\lambda}$ une sous-suite extraite faiblement convergente vers y^*, v^*, alors $y^* = y(v^*)$. De plus v^* vérifie $J_\lambda(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v)$. (6.19)

Enfin $y_{\epsilon\lambda}$ *converge fortement* vers $y(v^*)$ dans $H^1_0(\Omega)$.

Démonstration :

a) *démonstration de (6.18)*

Soit v_λ vérifiant (5.11). On a

$$J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) \leqslant J_\lambda(v_\lambda), \tag{6.20}$$

ce qui entraîne

$$\| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{Cte} \tag{6.21}$$

$$| A y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f |^2 \to 0 \text{ lorsque } \epsilon \to 0. \tag{6.22}$$

Comme pour le théorème 6.1, il en résulte la propriété (6.18).

b) *démonstration de (6.19)*

Soit $y_{\epsilon\lambda}$, $v_{\epsilon\lambda}$ une sous-suite extraite, telle que

$$v_{\epsilon\lambda} \underset{\epsilon \to 0}{\to} v^* \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ dual faible de } L^1(\Omega) \tag{6.23}$$

$$y_{\epsilon\lambda} \underset{\epsilon \to 0}{\to} y^* \text{ faiblement dans } H^1_0(\Omega). \tag{6.24}$$

Tout d'abord $y^* \in Y$. En effet $A y_{\epsilon\lambda}$ converge faiblement vers $A y^*$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Mais, en raison de (6.22), $A y_{\epsilon\lambda}$ demeure dans un borné de $L^2(\Omega)$, lorsque $\epsilon \to 0$.

Si on extrait une sous-suite faiblement convergente dans $L^2(\Omega)$, la limite ne peut être que $A y^*$. Donc $A y^* \in L^2(\Omega)$.

Comme pour la proposition 5.2 $A y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f \to A y^* + v^* y^* - f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. D'après (6.22) il est clair que

$$A y^* + v^* y^* - f = 0 \text{ p. p. } \Omega ; \; y^* \in H^1_0(\Omega). \tag{6.25}$$

Par ailleurs on a

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y^*), z_d - \mathscr{C} y^*\right)_K + \lambda \| v^* \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} \left\{ \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right)_K \right.$$

$$\left. + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$$

et d'après (6.20)

$$\leqslant \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v).$$

Par conséquent, on obtient

$$J_\lambda(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v). \tag{6.26}$$

Montrons la convergence forte de $y_{\epsilon\lambda}$ vers y^*. Nous avons

$$\int_\Omega v_{\epsilon\lambda} (y_{\epsilon\lambda})^2 \, dx = \int_\Omega v_{\epsilon\lambda} (y^*)^2 \, dx + \int_\Omega v_{\epsilon\lambda} [y_{\epsilon\lambda}^2 - y^{*2}] \, dx.$$

Or $\quad \left| \int_\Omega v_{\epsilon\lambda} [y_{\epsilon\lambda}^2 - y^{*2}] \, dx \right| \leqslant \text{Cte} \int_\Omega |y_{\epsilon\lambda}^2 - y^{*2}| \, dx;$

Or $\quad \int_\Omega |y_{\epsilon\lambda}^2 - y^{*2}| \, dx = \int_\Omega |y_{\epsilon\lambda} - y^*| \, |y_{\epsilon\lambda} + y^*| \, dx$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega |y_{\epsilon\lambda} - y^*|^2 \, dx} \quad \sqrt{\int_\Omega |y_{\epsilon\lambda} + y^*|^2 \, dx};$$

$$\int_\Omega |y_{\epsilon\lambda} + y^*|^2 \, dx \leqslant 2 \left[\int_\Omega |y_{\epsilon\lambda}|^2 \, dx + \int_\Omega |y^*|^2 \, dx \right. \leqslant \text{Constante.}$$

Comme $y_{\epsilon\lambda} \to y^*$ fortement dans $L^2(\Omega)$ (car l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte et en raison de (6.24)), on en déduit :

$$\int_\Omega |y_{\epsilon\lambda}^2 - y^{*2}| \, dx \to 0 \quad \text{donc} \quad \int_\Omega v_{\epsilon\lambda} [y_{\epsilon\lambda}^2 - y^{*2}] \, dx \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0;$$

y^{*2} appartenant à $L^1(\Omega)$, on voit que

$$\int_\Omega v_{\epsilon\lambda} \, y_{\epsilon\lambda}^2 \, dx \underset{\epsilon \to 0}{\to} \int_\Omega v^* \, y^{*2} \, dx. \tag{6.27}$$

Mais alors, en utilisant l'identité

$$\int_\Omega (Ay_{\epsilon\lambda}) \, y_{\epsilon\lambda} \, dx = \int_\Omega (Ay_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} \, y_{\epsilon\lambda} - f) \, y_{\epsilon\lambda} \, dx + \int_\Omega f y_{\epsilon\lambda} \, dx \tag{6.28}$$
$$- \int_\Omega v_{\epsilon\lambda} \, y_{\epsilon\lambda}^2 \, dx$$

et grâce à (6.22), (6.27), (6.24), on obtient :

$$\int_\Omega (Ay_{\epsilon\lambda}) \, y_{\epsilon\lambda} \, dx \underset{\epsilon \to 0}{\to} \int_\Omega f y^* \, dx - \int_\Omega v^* \, y^{*2} \, dx = \int_\Omega (Ay^*) \, y^* \, dx. \tag{6.29}$$

La convergence forte de $y_{\epsilon\lambda}$ vers y^*, dans $H_0^1(\Omega)$ résulte alors de (6.29), du fait que A est coercif et de la convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$.

c) *démonstration de (6.17).*
Considérons la suite :

$$L_\epsilon = \left(\Lambda^{-1} (z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}) \, , \, z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda} \right)_K + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{6.30}$$

L_ϵ est bornée. Soit donc une sous suite $L_{\epsilon'}$ convergente vers un élément L. Montrons que :

$$L = \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v). \tag{6.31}$$

En effet, la suite $(y_{\epsilon'\lambda}, v_{\epsilon'\lambda})$ étant bornée dans $H_0^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, on peut extraire une sous suite $y_{\epsilon''\lambda}, v_{\epsilon''\lambda}$ faiblement convergente vers y^{**}, v^{**}. D'après la partie b) de la démonstration la sous suite $L_{\epsilon''}$ converge alors vers $\inf_{v \in \mathscr{U}_+} J_\lambda(v)$. Or comme sous suite extraite de $L_{\epsilon'}$, elle converge vers L. D'où (6.31). Ainsi la suite L_ϵ ne peut avoir comme

point d'accumulation que $\inf_{v \in \mathcal{U}_+} J_\lambda(v)$. Il en résulte alors c).

Corollaire 6.1 : On a

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) = \inf_{v \in \mathcal{U}_+} J_\lambda(v) \tag{6.32}$$

$$\frac{1}{\epsilon} |A y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f|^2 \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0 \tag{6.33}$$

Démonstration : On a

$$L_\epsilon \leqslant J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) \leqslant \inf_{v \in \mathcal{U}_+} J_\lambda(v), \tag{6.34}$$

en raison de (6.20). Il en résulte (6.32) et (6.33).

6.3 - Cas où ϵ et λ convergent vers 0 simultanément.

Nous allons utiliser un lemme dû à TARTAR [56].

Lemme 6.1 (TARTAR). Soit $\mathcal{A}(u)$ une famille d'opérateurs linéaires $\left(u \in \mathcal{U} \text{ (Hilbert)}\right)$, $\in \mathcal{L}(K_1, K_2)$ où K_1 et K_2 sont deux Hilberts, $\mathcal{A}(u)$ inversible $\forall\, u \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ et vérifiant

$\| \mathcal{A}^{-1}(u) \|_{\mathcal{L}(K_2 ; K_1)} \leqslant \beta$, constante indépendante de μ.

Soit $f \in K_2$, $y(u) = \mathcal{A}^{-1}(u) f$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(K_1 ; K_0)$, où K_0 est un Hilbert, $z \in K_0$, on pose

$$I(u) = \inf_{y \in Y} \left(|\mathcal{C} y - z|^2_{K_0} + \frac{1}{\epsilon} |\mathcal{A}(u) y - f|^2_{K_2} \right)$$

où $Y = \{ y \in K_1 \mid \mathcal{A}(u) y \in K_2 , \forall\, u \in \mathcal{U}_{ad} \}$ alors on a

$$\frac{1}{1 + \epsilon \beta^2 \| \mathcal{C} \|^2} \left| \mathcal{C} y(u) - z \right|^2_{K_0} \leqslant I(u) \leqslant \left| \mathcal{C} y(u) - z \right|^2_{K_0} \tag{6.35}$$

Démonstration : L'inégalité de droite est évidente. Pour l'inégalité de gauche, on a tout d'abord

$$\mathcal{C}\, \mathcal{A}^{-1}(u) \left(\mathcal{A}(u) y - f \right) = \mathcal{C} \left(y - y(u) \right)$$

d'où

$$\| \mathcal{C} \| \beta \left| \mathcal{A}(u) y - f \right|_{K_2} \geqslant \left| \mathcal{C} \left(y - y(u) \right) \right|_{K_0}$$

$$\left| \mathcal{A}(u) y - f \right|_{K_2} \geqslant \frac{1}{\beta \| \mathcal{C} \|} \left| \mathcal{C} y - \mathcal{C} y(u) \right|_{K_0} \quad \forall\, y$$

d'où

$$\left| \mathcal{C} y - z \right|^2_{K_0} + \frac{1}{\epsilon} \left| \mathcal{A}(u) y - f \right|^2_{K_2} \geqslant \left| \mathcal{C} y - z \right|^2_{K_0}$$

$$+ \frac{1}{\epsilon \beta^2 \| \mathcal{C} \|^2} \left| \mathcal{C} y - \mathcal{C} y(u) \right|^2_{K_0} \quad \forall\, y$$

et

$$I(u) \geqslant \inf_{y} \left\{ |\mathcal{C} y - z|^2 + \frac{1}{\epsilon \beta^2 \| \mathcal{C} \|^2} \left| \mathcal{C} y - \mathcal{C} y(u) \right|^2_{K_0} \right\}$$

$$\geqslant \inf_{\zeta \in K_0} \left\{ |\zeta - z|^2 + \frac{1}{\epsilon \beta^2 \| \mathcal{C} \|^2} |\zeta - \mathcal{C} y(u)|^2_{K_0} \right\}$$

$$= \frac{1}{1 + \epsilon \beta^2 \| \mathscr{C} \|^2} | \mathscr{C} y(u) - z |^2_{K_0}$$

ce qui démontre (6.35) ■

On peut alors énoncer le

Théorème 6.3 : Hypothèses-Notations de 5.1 et 6.1. Les suites $y_{\epsilon\lambda}$, $v_{\epsilon\lambda}$ définies en (6.3) vérifient *lorsque* ϵ , $\lambda \to 0$ *simultanément :*

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}) , z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right)_K \underset{\epsilon , \lambda \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}_+} J(v) \tag{6.36}$$

$y_{\epsilon\lambda}$ demeure dans un borné de $H^1_0(\Omega)$ (6.37)

$$\frac{1}{\epsilon} | A y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f |^2_{L^2(\Omega)} \to 0 \tag{6.38}$$

$$\lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \tag{6.39}$$

Démonstration : On applique le lemme avec

$\mathscr{A}(u) = A + u$, $z = z_d$, $K_0 = K$, $K_1 = V$, $K_2 = L_{2(\Omega)}$.

On obtient

$$J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda} , v_{\epsilon\lambda}) \geqslant \inf_{u \in \mathscr{U}_+} J(u) . \tag{6.40}$$

Par ailleurs

$$\liminf_{\epsilon , \lambda \to 0} J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda} , v_{\epsilon\lambda}) \leqslant \inf_{u \in \mathscr{U}_+} J(u) . \tag{6.41}$$

Donc

$$\lim_{\epsilon , \lambda \to 0} J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda} , v_{\epsilon\lambda}) = \inf_{u \in \mathscr{U}_+} J(u) . \tag{6.42}$$

De même on voit aisément que (6.36) est vrai, et aussi que

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}) , z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right)_K + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)} \to \inf_{u \in \mathscr{U}_+} J(u) . \tag{6.43}$$

ce qui implique (6.38) et (6.39).

La propriété (6.37) résulte alors de (6.38), comme pour le théorème 6.1 ■

Dans le cas de la fonctionnelle $J^1_{\epsilon\lambda}(y , v)$, il est possible de donner des résultats plus complets.

Théorème 6.4 : Hypothèses et Notations de 5.1 et 6.1. Les couples $\overline{y}_{\epsilon\lambda}$, $\overline{v}_{\epsilon\lambda}$ définis par

$$J^1_{\epsilon\lambda}(\overline{y}_{\epsilon\lambda} , \overline{v}_{\epsilon\lambda}) = \inf_{\substack{y \in Y \\ v \in \mathscr{U}_+}} J^1_{\epsilon\lambda}(y , v) , \tag{6.45}$$

$J^1_{\epsilon\lambda}(y , v)$ étant définie en (6.16), vérifient lorsque ϵ , $\lambda \to 0$ simultanément :

$$\lim_{\epsilon , \lambda \to 0} \| z_d - \mathscr{C} \overline{y}_{\epsilon\lambda} \|_K = 0 \tag{6.46}$$

$(\overline{y}_{\epsilon\lambda} , \overline{v}_{\epsilon\lambda})$ demeure dans un borné de $H^1_0(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. (6.47)

Soit, encore notée $\overline{y}_{\epsilon\lambda}$, $\overline{v}_{\epsilon\lambda}$ une sous suite extraite faiblement convergente vers y^* , v^* , alors $v^* \in X$, $y^* = y(v^*)$ et $\| v^* \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{v \in X} \| v \|_{L^\infty(\Omega)}$ (6.48)

Enfin $\overline{y}_{\epsilon\lambda}$ converge *fortement* vers y^* dans $H^1_0(\Omega)$.

Démonstration :

Soit v_0 un élément de X. Nous avons

$$J^1_{\epsilon\lambda}(\bar{y}_{\epsilon\lambda}, \bar{v}_{\epsilon\lambda}) \leqslant \lambda \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{6.49}$$

ce qui entraîne (6.46) et

$$\| \bar{v}_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{6.50}$$

Comme pour le théorème 6.1, il résulte alors que $y_{\epsilon\lambda}$ demeure dans un borné de $H^1_0(\Omega)$, i.e. (6.47).

Soit $y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}$ une sous suite extraite, faiblement convergente vers $y^* \; v^*$. Comme pour le théorème 6.2, on voit que $y^* = y(v^*)$ et que $y_{\epsilon\lambda} \to y^*$ dans $H^1_0(\Omega$ *fortement.* Il en résulte, en raison de (6.46) que

$$\| z_d - \mathscr{C} y^* \|_k = 0 ; \tag{6.51}$$

donc $v^* \in$ X. Enfin, d'après (6.50), on a

$$\| v^* \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \liminf_{\epsilon,\, \lambda \to 0} \| \bar{v}_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{6.52}$$

Comme v_0 est quelconque dans X, on a bien $\| v^* \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{v \in X} \| v \|_{L^\infty(\Omega)}$. Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire 6.2 : On a :

$$\lim_{\epsilon,\, \lambda \to 0} J^1_{\epsilon\lambda}(\bar{y}_{\epsilon\lambda}, \bar{v}_{\epsilon\lambda}) = 0 \tag{6.53}$$

$$\lim_{\epsilon,\, \lambda \to 0} \frac{1}{\epsilon} | A y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f |^2_H = 0. \tag{6.54}$$

Démonstration. Immédiate à partir de (6.49) et (6.46).

Remarque 6.1 : Si dans le théorème 6.3, nous nous restreignons pour v à un borné de $L^\infty(\Omega)$, nous obtenons alors des résultats identiques à ceux du théorème 6.4.

7. Discrétisation :

7.1. Orientation :

Dans ce numéro, nous supposons pour simplifier que l'élément v à identifier appartient à un borné $\mathscr{U}_{ad} \subset \mathscr{U}_+$, défini par

$$\mathscr{U}_{ad} = \{ v \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leqslant v(x) \leqslant \beta \text{ p. p. } \Omega \}^{(1)}. \tag{7.1}$$

Dans ce cas la méthode des moindres carrés conduit au problème suivant :

— minimiser la fonctionnelle J (v) définie en (5.7), pour $v \in \mathscr{U}_{ad}$.

Nous associons alors à J (v) la fonctionnelle

$$\check{J}_\epsilon(y, v) = (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y), z_d - \mathscr{C} y) + \frac{1}{\epsilon} | Ay + vy - f |^2. \tag{7.2}$$

Les théorèmes 6.1 et 6.2 donnent par transposition facile

Il existe des couples $y_\epsilon, v_\epsilon \; (y_\epsilon \in Y, v_\epsilon \in \mathscr{U}_{ad})$ où $\check{J}_\epsilon(y, v)$ atteint sa borne inférieure. } (7.3)

(1) Hypothèse légitime en pratique, en choisissant β convenablement.

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y_\epsilon)\,,\, z_d - \mathscr{C}\, y_\epsilon\right)_K \underset{\epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)\,. \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{\epsilon} \left| A y_\epsilon + v_\epsilon\, y_\epsilon - f \right|^2_H \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0. \tag{7.5}$$

y_ϵ demeure dans un borné de $H_0^1(\Omega)$. (7.6)

Soit encore notée (y_ϵ, v_ϵ) une sous suite extraite, faiblement convergente vers y^*, v^*, alors $v^* \in \mathscr{U}_{ad}, y^* = y(v^*)$, et $J(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)$. (7.7)

Minimiser $\check{J}_\epsilon(y, v)$ au lieu de la fonctionnelle $J(v)$ initiale est plus avantageux car $\check{J}_\epsilon(y, v)$ est une fonctionnelle *explicite*, alors que $J(v)$ est une fonctionnelle *implicite*. Nous allons maintenant faire un pas de plus et remplacer la minimisation de $J_\epsilon(y, v)$ par celle d'une fonctionnelle discrétisée.

7.2. Hypothèses - Notations.

Les notations non redéfinies sont identiques à celles des n^{os} 2.3 et 2.4. Nous posons de plus :

$$\mathscr{V} = \mathscr{D}(\Omega) \tag{7.8}$$

$$S_h^0(\Omega) = \{M \mid M \in \mathscr{R}_h,\ \sigma_h(M; 1) \subset \Omega\} \tag{7.9}$$

$$H_h = \{y_h \mid y_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^0} y_h(M)\, W_{hM}(x)\} \tag{7.10}$$

$$V_h = \{y_h \mid y_h(x) = \sum_{M \in S_h^0(\Omega)} y_h(M)\, W_{hM}(x)\}. \tag{7.11}$$

Nous introduisons sur V_h la norme (cf. [48]).

$$\|y_h\|_h = \left(\sum_{1=l}^{n} \int_\Omega |\delta_l y_h|^2_H\, dx + \int_\Omega |y_h|^2_H\, dx \right)^{1/2}. \tag{7.12}$$

Soit p_h le prolongement $\in \mathscr{L}(V_h; F)$ défini par :

$$p_h y_h = (y_h, \delta_1 y_h, \ldots, \delta_n y_h) \tag{7.13}$$

et $r_h \in \mathscr{L}(H; V_h)$ définie par

$$r_h f(M) = \frac{1}{h_1 \ldots h_n} \int_{\sigma_h(M; 0)} f(x)\, dx;\ M \in S_h^0(\Omega). \tag{7.14}$$

Nous avons

$$p_h r_h \varphi \to \varpi\varphi\ \forall\ \varphi \in \mathscr{V}. \tag{7.15}$$

Nous supposons de plus

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}(L^2(\Omega); K). \tag{7.16}$$

Nous introduisons l'opérateur A_h approché de A : $A_h \in \mathscr{L}(V_h; V_h)$ défini par

$$(A_h\, y_h)(M) = \frac{1}{h_1 \ldots h_n} \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(\delta_j y_h)(\delta_i W_{hM}) + a_0(x)\, y_h W_{hM} \right] dx \right\};\ M \in S_h^0(\Omega) \tag{7.17}$$

Nous considérons alors la fonctionnelle approchée

$$\check{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y_h)\,,\, z_d - \mathscr{C}\, y_h\right)_K + \frac{1}{\epsilon} \left| A_h\, y_h + r_h(v_h\, y_h) - r_h f \right|^2_H,$$

pour $y_h \in V_h$ et $v_h \in \mathscr{U}_{ad} \cap H_h = \mathscr{U}_{ad}^h$. (7.18)

En réalité $\tilde{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h)$ est une fonction d'un nombre *fini* de variables $y_h(M)$, $M \in S_h^0(\Omega)$ et $v_h(M)$, $M \in \Omega_h^0$. Nous avons

Proposition 7.1 : Il existe des couples $(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ vérifiant

$$\tilde{J}_{\epsilon,h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) = \inf_{y_h \in V_h;\ v_h \in \mathcal{U}_{ad}^h} \tilde{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h). \tag{7.19}$$

Démonstration : Soit y_{hn}, v_{hn} une suite minimisante de $\tilde{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h)$. Par définition de $\mathcal{U}_{ad}^h$, la suite $v_{hn} \in \mathcal{U}_{ad}$, est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Donc les variables réelles $v_{hn}(M)$, $M \in \Omega_h^0$ sont bornées lorsque $n \to +\infty$. Montrons qu'il en est de même des variables $y_{hn}(P)$, $P \in S_h^0(\Omega)$. D'après la forme de $\tilde{J}_{\epsilon,h}(y_{hn}, v_{hn})$ et le fait que y_{hn}, v_{hn} est une suite minimisante, la quantité $\xi_n = A_h y_{hn} + r_h(v_{hn}\, y_{hn})$ demeure dans un borné de $L^2(\Omega)$, lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on a

$$\int_\Omega (A_h\, y_{hn})\, y_{hn}\, dx + \int_\Omega r_h(v_{hn}\, y_{hn})\, y_{hn}\, dx < \text{Cte} \sqrt{\int_\Omega (y_{hn})^2\, dx}. \tag{7.20}$$

Or

$$\int_\Omega (A_h\, y_{hn})\, y_{hn}\, dx = \int_\Omega \left(\sum_{M \in S_h^0(\Omega)} (A_h\, y_{hn})(M)\, W_{hM}(x) \right) \left(\sum_{P \in S_h^0(\Omega)} y_{hn}(P)\, W_{hP}(x) \right) dx$$

$$= h_1 \dots h_n \sum_{P \in S_h^0(\Omega)} (A_h\, y_{hn})(P)\, y_{hn}(P),$$

et d'après (7.17)

$$= \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, (\delta_j\, y_{hn})(\delta_i\, y_{hn}) + a_0(x)\, (y_{hn})^2 \right] dx ;$$

soit, d'après (5.2)

$$\int_\Omega (A_h\, y_{hn})\, y_{hn}\, dx \geqslant \alpha \left[\int_\Omega (y_{hn})^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\delta_i\, y_{hn})^2\, dx \right]. \tag{7.21}$$

Comme

$$\int_\Omega r_h(v_{hn}\, y_{hn})\, y_{hn}\, dx = \sum_{M \in S_h^0(\Omega)} v_{hn}(M) \left[y_{hn}(M) \right]^2 \geqslant 0 ;$$

il résulte alors de (7.20) et (7.21) que

$$\int_\Omega (y_{hn})^2\, dx \leqslant \text{Constante}. \tag{7.22}$$

Or

$$\int_\Omega (y_{hn})^2\, dx = \sum_{P \in S_h^0(\Omega)} h_1 \dots h_n \left[y_{hn}(P) \right]^2 ;$$

donc les $y_{hn}(P)$ demeurent bornés lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent, des suites $v_{hn}(M)$, $y_{hn}(P)$ on peut extraire des sous suites convergentes vers $\overline{v_h}(M)$, $\overline{y_h}(P)$. Comme la fonction $\tilde{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h)$ dépend continuement des $y_h(P)$, $v_h(M)$, il en résulte que

$$\tilde{J}_{\epsilon,h}(y_{hn}, v_{hn}) \underset{n \to +\infty}{\to} \tilde{J}_{\epsilon,h}(\overline{y_h}, \overline{v_h}) ; \tag{7.23}$$

et comme y_{hn}, v_{hn} est une suite minimisante, la proposition est démontrée.

7.3 - Passage à la limite.

Théorème 7.1 : Hypothèses et notations de 5.1 et 7.2. Les suites $y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}$ vérifiant (7.19) possèdent lorsque $h, \epsilon \to 0$ les propriétés suivantes :

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{h\epsilon}), z_d - \mathscr{C} y_{h\epsilon} \right) \underset{h,\, \epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) ; \tag{7.24}$$

(J (v) définie en (5.7))

($p_h\ y_{h\epsilon}$, $v_{h\epsilon}$) demeure dans un borné de F × $L^\infty(\Omega)$ lorsque $h, \epsilon \to 0$; *(7.25)*

Soit, encore notée $p_h\ y_{h\epsilon}$, $v_{h\epsilon}$ une sous suite extraite faiblement convergente dans F × $L^\infty(\Omega)$ vers ψ^*, v^*, alors $\psi^* = \varpi\, y(v^*)$ et $J(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)$. *(7.26)*

De plus $p_h\ y_{h\epsilon} \underset{h,\ \epsilon \to 0}{\to} \varpi\, y(v^*)$ *fortement* dans F.

Démonstration.

a) ($p_h\ y_{h\epsilon}$, $v_{h\epsilon}$) demeure dans un borné de F × $L^\infty(\Omega)$.

Pour $v_{h\epsilon}$, cela résulte, par définition, du fait que $v_{h\epsilon} \in \mathscr{U}_{ad}$. Soit maintenant un élément v_0 tel que

$$J(v_0) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{7.27}$$

Posons $y_0 = y(v_0)$ et $s_h\, v_0 \in H_h$ défini par

$$(s_h\, v_0)(M) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\Omega \cap \sigma_h(M;\,0)} y_0(x)\, dx \ ;\ M \in \Omega_h^0. \tag{7.28}$$

Nous savons que

$$s_h\, v_0 \to v_0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \tag{7.29}$$

Considérons maintenant l'équation

$$A_h\, z_h + r_h(s_h\, v_0\, z_h) = r_h\, f, \tag{7.30}$$

qui possède *une solution et une seule* puisque la matrice du système (7.30) est strictement définie positive. Soit $\overline{y}_h$ cette solution. De (7.30) nous déduisons :

$$(A_h\, \overline{y}_h,\ \overline{y}_h)_H + (r_h(s_h\, v_0\ \overline{y}_h),\ \overline{y}_h)_H = (r_h\, f,\ \overline{y}_h)_H\ ; \tag{7.31}$$

soit

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} a_{ij}(x)\,(\delta_j\ \overline{y}_h)\,(\delta_i\ \overline{y}_h) + a_0(x)\,(\overline{y}_h)^2 \right] dx + \sum_{M \in S_h^0(\Omega)} \left[\ \overline{y}_h(M)\ \right]^2 (s_h\, v_0)(M) = (r_h\, f,\ \overline{y}_h)_H\ ; \tag{7.32}$$

et d'après (5.2), il vient

$$\alpha \parallel p_h\ \overline{y}_h \parallel_F^2 \leqslant |\, r_h\, f \,|\, |\ \overline{y}_h\ |_H \leqslant \text{Cte} \parallel p_h\ \overline{y}_h \parallel_F\ ; \tag{7.33}$$

Donc

$$\parallel p_h\ \overline{y}_h \parallel_F \leqslant \text{Cte}. \tag{7.34}$$

Nous utilisons alors un résultat de *compacité discrète* (cf. CEA [15]). Il est possible d'extraire de la suite $p_h\ \overline{y}_h$, une sous suite, encore notée $p_h\ \overline{y}_h$, telle que

$$\overline{y}_h \underset{h \to 0}{\to} y^* \text{ *fortement* dans } L^2(\Omega). \tag{7.35}$$

On démontre alors (cf. [15])

$$y^* \in H_0^1(\Omega) \tag{7.36}$$

$$p_h\ \overline{y}_h \to \varpi\ y^* \text{ dans F, } \textit{faiblement.} \tag{7.37}$$

Il résulte de (7.29) et (7.35) que

$$r_h(s_h v_0\ \overline{y}_h) = s_h v_0\ \overline{y}_h \to v_0\ y^*\ \textit{faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{7.37}$$

Par ailleurs $A_h\ \overline{y}_h \to A\, y^*$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. En effet, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, nous avons

$$(A_h\ \overline{y}_h, \varphi)_H = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,(\delta_j\ \overline{y}_h)\,(\delta_i\, r_h\, \varphi) + a_0(x)\ \overline{y}_h\,(r_h\,\varphi) \right] dx. \tag{7.38}$$

On peut montrer (cf. [15]) que

$$r_h\,\varphi \to \varphi \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement} \tag{7.39}$$

$$\delta_j\, r_h\, \varphi \to \frac{\delta \varphi}{\delta x_j} \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement}. \tag{7.40}$$

Grâce à (7.37), on peut passer à la limite dans (7.38). Il vient

$$(A_h\ \overline{y}_h, \varphi)_H \to (A\, y^*, \varphi)_H. \tag{7.41}$$

On peut alors passer à la limite dans (7.30). Il vient

$$A\, y^* + v_0\ y^* = f \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega), \tag{7.42}$$

ce qui, joint à (7.36), montre que $y^* = y(v_0)$. En raison de l'unicité de la limite des sous suites extraites, toute la suite

$$\overline{y}_h \underset{h \to 0}{\to} y(v_0) \textit{ fortement dans } L^2(\Omega). \tag{7.43}$$

Nous avons alors

$$\check{J}_{\epsilon h}(\overline{y}_h, s_h v_0) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\,\overline{y}_h),\ z_d - \mathscr{C}\,\overline{y}_h\right) \underset{\epsilon,\, h \to 0}{\to} J(v_0) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{7.44}$$

Or nous avons

$$\check{J}_{\epsilon h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \leqslant J_{\epsilon h}(\overline{y}_h, s_h v_0), \tag{7.45}$$

donc

$$\limsup_{\epsilon,\, h \to 0} \check{J}_{\epsilon h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \leqslant \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{7.46}$$

De l'expression de $\check{J}_{\epsilon h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ résulte alors que

$$\xi_{h\epsilon} = A_h\, y_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon}\, y_{h\epsilon}) \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega). \tag{7.47}$$

Il en résulte alors, comme plus haut à partir de (7.31) que

$$\| p_h\ y_{h\epsilon} \|_F \leqslant \text{Constante}. \tag{7.48}$$

b) **Convergence des sous suites extraites.**

Soit, encore notée $y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}$ une sous suite extraite, telle que

$$v_{h\epsilon} \to v^* \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ dual faible de } L^1(\Omega) \tag{7.49}$$

$$p_h\ y_{h\epsilon} \to \psi^* \text{ dans F faiblement.} \tag{7.50}$$

Il résulte alors, comme plus haut, et en utilisant le résultat de compacité que

$$\psi^* = \varpi\, y^* \tag{7.51}$$

avec

$$y^* \in H_0^1(\Omega) \tag{7.52}$$

$$y_{h\epsilon} \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} y^* \text{ } \textit{fortement} \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{7.53}$$

$$\delta_i\, y_{h\epsilon} \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} \frac{\delta y^*}{\delta x_i} \text{ } \textit{faiblement} \text{ dans } L^2(\Omega)\,. \tag{7.54}$$

Du fait que $\tilde{J}_{\epsilon h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ est borné, il résulte que

$$A_h\, y_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon})\, y_{h\epsilon}) - r_h f \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} 0. \tag{7.55}$$

Or d'après (7.49), (7.53), (7.54), on a

$$A_h\, y_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon})\, y_{h\epsilon}) - r_h f \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} A\, y^* + v^*\, y^* - f \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{7.56}$$

Il résulte de (7.55) et (7.56) que

$$A\, y^* + v^*\, y^* - f = 0\,,$$

donc

$$y^* = y(v^*)\,, \tag{7.57}$$

et

$$(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y_{h\epsilon})\,,\, z_d - \mathscr{C}\, y_{h\epsilon}) \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y(v^*)\,,\, z_d - \mathscr{C}\, y(v^*))\,,$$

soit $J(v^*)$. D'après (7.46), on voit que

$$J(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{7.58}$$

Montrons enfin la convergence *forte* de $p_h\, y_{h\epsilon}$ vers $\varpi\, y^*$ dans F. On a tout d'abord

$$\int_\Omega r_h(v_{h\epsilon}\, y_{h\epsilon})\, y_{h\epsilon}\, dx = \int_\Omega v_{h\epsilon}(y_{h\epsilon})^2\, dx \to \int_\Omega v^*(y^*)^2\, dx. \tag{7.59}$$

Par conséquent $\int_\Omega (A_h\, y_{h\epsilon})\, y_{h\epsilon}\, dx \to \int_\Omega (A\, y^*)\, y^*\, dx$,

soit

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i,\,j}(x)\, (\delta_j\, y_{h\epsilon})\, (\delta_i\, y_{h\epsilon}) + a_0(x)\, (y_{h\epsilon})^2 \right] dx \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} \tag{7.60}$$

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,\,j=1} a_{i,\,j}(x) \frac{\delta y^*}{\delta x_j} \frac{\delta y^*}{\delta x_i} + a_0(x)(y^*)^2 \right] dx,$$

d'où l'on déduit, grâce à la convergence faible (7.50)

$$\left.\begin{aligned} &y_{h\epsilon} \to y^* \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \\ &\delta_j\, y_{h\epsilon} \to \frac{\delta\, y^*}{\delta\, x_j} \text{ fortement dans } L^2(\Omega)\,,\ j = 1 \ldots n, \end{aligned}\right\} \tag{7.61}$$

soit $p_h\, y_{h\epsilon} \to \varpi\, y^*$ fortement dans F.

c) La suite (entière) $y_{h\epsilon}$ est minimisante.

En effet, considérons la suite

$$L_{h\epsilon} = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y_{h\epsilon}),\, z_d - \mathscr{C}\, y_{h\epsilon}\right); \tag{7.62}$$

$L_{h\epsilon}$ demeure bornée, lorsque $h, \epsilon \to 0$. Soit donc, encore notée $L_{h\epsilon}$ une sous suite convergente vers L. Montrons que

$$L = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{7.63}$$

La suite $(p_h\, y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ demeure un borné de $F \times L^\infty(\Omega)$. D'après la partie b), on peut en extraire une sous suite $p_{h'}\, y_{h'\epsilon'}, v_{h'\epsilon'}$ convergente vers y^{**}, v^{**}. Il en résulte, toujours d'après la partie b) que $L_{h'\epsilon'} \to \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)$, ce qui implique (7.63).

Ainsi la suite $L_{h\epsilon}$ ne peut avoir comme seul point d'accumulation que $\inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)$. Il en résulte la propriété c).

Corollaire 7.1 : On a aussi

$$\check{J}_{h\epsilon}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{7.64}$$

$$\frac{1}{\epsilon} \left| A_h\, y_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon}\, y_{h\epsilon}) - r_h\, f \right|_H^2 \underset{h,\,\epsilon \to 0}{\to} 0. \tag{7.65}$$

8 - Autre schéma de discrétisation.

8.1 - Hypothèses - Notations.

Nous reprenons le problème : minimiser $J(v) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y(v)),\, z_d - \mathscr{C}\, y(v)\right)$, avec $v \in \mathscr{U}_{ad} = \{ v \in L^\infty(\Omega),\, 0 \leqslant v \leqslant \beta \}$, où $y(v) \equiv y$ est la solution de

$$\left.\begin{aligned} &Ay + vy = f \\ &y \in V = H_0^1(\Omega). \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Nous supposons que

$$f \in V' \tag{8.2}$$

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}(V; K) \tag{8.3}$$

Remarque 8.1 : Les hypothèses (8.2) et (8.3) sont plus générales que (5.4) et (7.16) ■

Nous allons introduire une famille d'approximation stable et convergente de $H_0^1(\Omega)$ [1].

Les notations non redéfinies auront la même signification qu'en 2.4. Soit

$$\varpi^{M}_{h,1} = \prod_{1=1}^{n} \left[(m_i - 1)\, h_i,\, (m_i + 1)\, h_i\right] \;;\; M \in \mathscr{R}_h \tag{8.4}$$

$$W^{M}_{h,1} = W_{hM} * \frac{W_{h0}}{h_1 \ldots h_n};\; M \in \mathscr{R}_h. \tag{8.5}$$

Soit $\mathscr{R}_h^1(\Omega)$ le sous ensemble de $\mathscr{R}_h$ défini par

$$\mathscr{R}_h^1(\Omega) = \{ M \mid M \in \mathscr{R}_h,\, W^{M}_{h,1} \subset \Omega \}, \tag{8.6}$$

et soit $l^2(\mathscr{R}_h^1(\Omega))$ l'espace des suites y_h de la forme

$$y_h = \{ y_h^M ;\, M \in \mathscr{R}_h^1(\Omega) \} \;;\; y_h^M \in R. \tag{8.7}$$

(1) Pour des précisions sur cette notion, nous renvoyons à J.-P. AUBIN [3].

Nous munissons $l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$ du produit scalaire hilbertien

$$(y_h, z_h)_h = h_1 \dots h_n \sum_{M \in \mathscr{R}_h^1(\Omega)} y_h^M z_h^M. \tag{8.8}$$

Introduisons le prolongement p_h^1 de $l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Nous posons, pour tout $y_h \in l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$

$$p_h^1 y_h = \sum_{M \in \mathscr{R}_h^1(\Omega)} y_h^M W_{h,1}^M. \tag{8.9}$$

On sait (cf. [48]) que p_h^1 est une application injective de $l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right.$ dans $\left.H^1(\Omega)\right)$. Donc $\| p_h^1 y_h \|_V$ définit une norme sur $l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$. Nous appelons $W_{1,2}\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$, l'espace $l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$ muni de cette norme. On désigne par $|||_h$ la norme sur $W_{1,2}\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$. Nous définissons une restriction (application linéaire et continue de $H_0^1(\Omega) \to l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right)$) par

$$(r_h^1 y)^M = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\sigma_h(M;0)} y dx \qquad ; \forall\ M \in \mathscr{R}_h^1(\Omega). \tag{8.10}$$

Nous posons, pour simplifier les notations

$$V_h = l^2\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right) = W_{1,2}\left(\mathscr{R}_h^1(\Omega)\right); \tag{8.11}$$

V_h est ainsi muni de deux normes $|\ \ |_h$ et $\|\ \ \|_h$. Nous définissons l'opérateur $A_h \in \mathscr{L}(V_h; V_h)$ approché de A, par

$$(A_h y_h)^P = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left[a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (p_h^1 y_h) \frac{\partial}{\partial x_i} W_{h,1}^P + a_0(x) (p_h^1 y_h) W_{h,1}^P \right] dx \right\}$$
$$\forall P \in \mathscr{R}_h^1(\Omega). \tag{8.12}$$

Soit enfin r_h^{1*} l'adjoint de p_h défini par

$$(r_h^{1*} f, y_h)_h = \langle f, p_h y_h \rangle \quad \forall\ y_h \in V_h, \tag{8.13}$$

soit

$$(r_h^{1*} f)^M = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \langle f, W_{h,1}^M \rangle \qquad f \in V'; M \in \mathscr{R}_h^1(\Omega). \tag{8.14}$$

Nous considérons alors la fonctionnelle approchée

$$\check{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} p_h^1 y_h), z_d - \mathscr{C} p_h^1 y_h\right) + \frac{1}{\epsilon} | A_h y_h + r_h^{1*}(v_h p_h^1 y_h) - r_h^{1*} f |_h^2 \tag{8.15}$$

pour $y_h \in V_h$ et $v_h \in \mathscr{U}_{ad}^h$.

8.2. Existence d'un minimum de la fonctionnelle approchée

Proposition 8.1 : Il existe un couple (au moins) $y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}$ vérifiant

$$\check{J}_{\epsilon,h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) = \inf_{y_h \in v_h\ ;\ v_h \in \mathscr{U}_{ad}^h} \check{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h). \tag{8.16}$$

Démonstration : Soit y_{hn}, v_{hn} une suite minimisante de $\check{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h)$. Par définition de $\mathscr{U}_{ad}^h$, les variables $v_{hn}(M)$, $M \in \Omega_h^0$ sont bornées par β. Montrons que les variables y_{hn}^P, $P \in \mathscr{R}_h^1(\Omega)$ sont également bornées. D'après la forme de $\check{J}_{\epsilon,h}(y_h, v_h)$, on voit que $\xi_n = A_h y_{hn} + r_h^{1*}(v_{hn} p_h^1 y_{hn})$ demeure dans un *borné* de v_h. Or on a

$$(\xi_n, y_{hn}) = \langle A p_h^1 y_{hn}, p_h^1 y_{hn} \rangle + (v_{hn} p_h^1 y_{hn}, p_h^1 y_{hn}), \tag{8.17}$$

soit

$$\alpha \| y_{hn} \|_h^2 \leqslant | \xi_n |_h | y_{hn} |_h \qquad (8.18)$$

$$\leqslant C(h) | \xi_n |_h \| y_{hn} \|_h .$$

Lorsque $n \to +\infty$, $| \xi_n |_h$ demeure dans un borné de v_h, donc

$$\| y_{hn} \|_h^2 \leqslant C_1(h) \quad \text{et}$$

$$| y_{hn} |_h^2 \leqslant C_2(h)$$

Or

$$| y_{hn} |_h^2 = h_1 \ldots h_n \sum_{M \in \mathscr{R}_h^1(\Omega)} (y_{hn}^M)^2 ,$$

donc les y_{hn}^P sont bornés, lorsque $n \to +\infty$.

On peut donc extraire de y_{hn}^P , v_{hn} (M) une sous-suite $y_{hn'}^P$, $v_{hn'}$ (M) convergente vers $\bar{y}_h^P$, $\bar{v}_h$ (M). Comme la fonction $\check{J}_{\epsilon,h}(y_h , v_h)$ dépend continuement de variables y_h^P , v_h (M) il en résulte que

$$\check{J}_{\epsilon,h}(y_{hn} , v_{hn}) \to \check{J}_{\epsilon,h}(\bar{y}_h , \bar{v}_h) , \qquad (8.19)$$

et comme y_{hn} , v_{hn} est une suite minimisante, la proposition est démontrée.

8.3. Convergence.

Nous allons faire tendre h et ϵ simultanément vers 0.

Théorème 8.1 : Hypothèses et Notations de 8.1. Les suites $y_{h\epsilon}$, $v_{h\epsilon}$ définies en (8.16) vérifient, lorsque $h, \epsilon \to 0$ simultanément

$$(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} p_h^1 y_{h\epsilon}) , z_d - \mathscr{C} p_h^1 y_{h\epsilon}) \underset{h,\, \epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v) \qquad (8.20)$$

$(p_h^1 y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ demeure dans un borné de $H_0^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ lorsque $h, \epsilon \to 0$. *(8.21)*

Soit, encore notée $(p_h^1 y_{h\epsilon} , v_{h\epsilon})$, une sous-suite faiblement convergente vers y^* , v^*, alors $y^* = y(v^*)$ et $J(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)$. De plus $p_h^1 y_{h\epsilon} \to y^*$ *fortement* dans $H_0^1(\Omega)$, lorsque $h, \epsilon \to 0$. *(8.22)*

Démonstration :

a) *démonstration de (8.21).*

Pour $v_{h\epsilon}$, cela résulte de la définition de $\mathscr{U}_{ad}^h$. Soit v_0 un élément de $\mathscr{U}_{ad}$ tel que

$$J(v_0) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v) , \qquad (8.23)$$

et $s_h v_0$ défini, comme en (7.28). Considérons l'équation,

$$A_h \bar{y}_h + r_h^{1*}(s_h v_0 \; p_h^1 \bar{y}_h) = r_h^{1*} f, \qquad (8.24)$$

qui possède une solution unique $\bar{y}_h$. Elle s'écrit, sous forme varationnelle

$$< A p_h^1 \bar{y}_h, \; p_h^1 z_h > + (s_h v_0 \; p_h^1 \bar{y}_h, \; p_h^1 z_h) = (f, \; p_h^1 z_h); \; \forall \, z_h \in v_h . \qquad (8.25)$$

De (8.25), on déduit alors, en faisant $z_h = \bar{y}_h$

$$\alpha \| p_h^1 \bar{y}_h \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leqslant | f | \quad | p_h^1 \bar{y}_h |_H \leqslant | f | \quad \| p_h^1 \bar{y}_h \|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad (8.26)$$

d'où

$$\| p_h^1 \bar{y}_h \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \text{Constante, lorsque } h \to 0. \qquad (8.27)$$

Soit une sous-suite, encore notée $p_h^1 \bar{y}_h$ convergeant faiblement vers y^* dans $H_0^1(\Omega)$. Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est *compacte* (cf. [36]), on en déduit que

$$p_h^1 \bar{y}_h \to y^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement}. \tag{8.28}$$

On a alors, comme pour le théorème 7.1

$$s_h v_0 p_h^1 \bar{y}_h \to v_0 y^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \textit{ faiblement}. \tag{8.29}$$

Dans (8.25) prenons $z_h = r_h^1 z$, avec $z \in H_0^1(\Omega)$. On peut alors passer à la limite, lorsque $h \to 0$, en tenant compte de ce que $p_h^1 r_h^1 z \to z$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$, lorsque $h \to 0$. Il vient

$$\left.\begin{array}{l} < A y^*, z > + (v_0 y^*, z) = < f, z > \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \text{ de sorte que } y^* = y(v_0), \\ \text{et en raison de l'unicité de la limite, toute la suite } p_h^1 \bar{y}_h \to y(v_0) \text{ dans } H_0^1(\Omega) \\ \text{faiblement (dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement}). \text{ Par conséquent} \end{array}\right\} \tag{8.30}$$

$$(s_h v_0 p_h^1 \bar{y}_h, p_h^1 \bar{y}_h) - < f, p_h^1 \bar{y}_h > \to (v_0 y^*, y^*) - < f, y^* >, \tag{8.31}$$

c'est-à-dire

$$< A p_h^1 \bar{y}_h, p_h^1 \bar{y}_h > \to < A y^*, y^* > \tag{8.32}$$

ce qui, avec la convergence faible, entraîne

$$p_h^1 \bar{y}_h \to y(v_0) \textit{ fortement} \text{ dans } H_0^1(\Omega). \tag{8.33}$$

Il en résulte

$$(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} p_h^1 \bar{y}_h), z_d - \mathscr{C} p_h^1 \bar{y}_h) \to (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y(v_0)), z_d - \mathscr{C} y(v_0)). \tag{8.34}$$

Par conséquent

$$\check{J}_{\epsilon,h}(\bar{y}_h, s_h v_0) \underset{\epsilon, h \to 0}{\to} J(v_0) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{8.35}$$

Or nous avons

$$\check{J}_{\epsilon,h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \leqslant \check{J}_{\epsilon,h}(\bar{y}_h, s_h v_0), \tag{8.36}$$

d'où

$$\limsup_{\epsilon,h \to 0} \check{J}_{\epsilon,h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \leqslant \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \tag{8.37}$$

On voit alors que

$$|\xi_{h\epsilon}|_h = |A_h y_{h\epsilon} + r_h^{1*}(v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon})|_h \leqslant \text{Constante, lorsque } h, \epsilon \to 0. \tag{8.38}$$

Or

$$(\xi_{h\epsilon}, y_{h\epsilon})_h = (A_h y_{h\epsilon}, y_{h\epsilon})_h + (v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon}, p_h^1 y_{h\epsilon}), \tag{8.39}$$

soit

$$\alpha \| p_h^1 y_{h\epsilon} \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant |\xi_{h\epsilon}|_h \quad |y_{h\epsilon}|_h. \tag{8.40}$$

Or (cf. [48]) on a

$$|y_{h\epsilon}|_h \leqslant \| p_h^1 y_{h\epsilon} \|_{H_0^1(\Omega)} \tag{8.41}$$

et (8.40) et (8.41) impliquent (8.21).

b) *démonstration de (8.22).*

Soit, encore notée $(p_h^1 y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ une sous-suite extraite, faiblement convergente vers y^*, v^*

$v_{h\epsilon} \to v^*$ dans $L^\infty(\Omega)$, dual faible de $L^1(\Omega)$ *(8.42)*

$p_h^1 y_{h\epsilon} \to y^*$ dans $H_0^1(\Omega)$ faiblement. *(8.43)*

comme $\check{J}_{\epsilon,h}(y_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ est borné, on a

$|A_h y_{h\epsilon} + r_h^{1*}(v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon}) - r_h^{1*} f|_h \to 0$ lorsque $h, \epsilon \to 0$. *(8.44)*

Donc, si $z \in H_0^1(\Omega)$, on voit que

$$< A p_h^1 y_{h\epsilon}, p_h^1 r_h^1 z > + (v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon}, p_h^1 r_h^1 z) - < f, p_h^1 r_h^1 z > \to 0, \text{ lorsque } h, \epsilon \to 0. \quad \} \quad (8.45)$$

Or

$p_h^1 r_h^1 z \to z$ dans $H_0^1(\Omega)$ *fortement*

$v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon} \to v^* y^*$ dans $L^2(\Omega)$ *faiblement*

$A p_h^1 y_{h\epsilon} \to A y^*$ dans $H^{-1}(\Omega)$ *faiblement*;

d'où, à la limite, dans (8.45)

$$< A y^*, z > + (v^* y^*, z) - < f, z > = 0, \quad (8.46)$$

donc $y^* = y(v^*)$.

De plus $y_{h\epsilon} \xrightarrow[h,\epsilon \to 0]{} y^*$, dans $H_0^1(\Omega)$ *fortement*. En effet, nous avons

$$| (A_h y_{h\epsilon}, y_{h\epsilon})_h + (v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon}, p_h^1 y_{h\epsilon}) - < f, p_h^1 y_{h\epsilon} > | \quad (8.47)$$

$$\leqslant |A_h y_{h\epsilon} + r_h^{1*}(v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon}) - r_h^{1*} f|_h \quad |y_{h\epsilon}|_h \underset{h,\epsilon \to 0}{\to} 0,$$

grâce à (8.41). Or, nous avons

$$(v_{h\epsilon} p_h^1 y_{h\epsilon}, p_h^1 y_{h\epsilon}) - < f, p_h^1 y_{h\epsilon} > \underset{h,\epsilon \to 0}{\to} (v^* y^*, y^*) - (f, y^*) \quad (8.48)$$

$$= - < A y^*, y^* >,$$

donc finalement

$$< A p_h^1 y_{h\epsilon}, p_h^1 y_{h\epsilon} > \underset{\epsilon,h \to 0}{\to} < A y^*, y^* >, \quad (8.49)$$

d'où l'on déduit, avec la convergence faible,

$p_h^1 y_{h\epsilon} \xrightarrow[h,\epsilon \to 0]{} y(v^*)$ *fortement* dans $H_0^1(\Omega)$. *(8.50)*

Par conséquent, on a également

$$(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} p_h^1 y_{h\epsilon}), z_d - \mathscr{C} p_h^1 y_{h\epsilon}) \to (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y(v)), z_d - \mathscr{C} y(v^*)). \quad (8.51)$$

Il résulte alors de (8.37) que

$$J(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v). \quad (8.52)$$

c) *démonstration de (8.20).*

Le raisonnement est identique à la partie c) du théorème 7.1.

Remarque 8.2 : Alors que, dans le schéma de discrétisation du n° 7, il est possible de prendre y dans $H^1(\Omega)$ (et non plus dans $H_0^1(\Omega)$)[1], dans le modèle du n° 8, nous ne savons pas si le raisonnement se transpose pour $y \in H^1(\Omega)$. La difficulté provient du fait, que nous ne savons pas si la propriété (8.41) demeure vraie pour $H^1(\Omega)$.

(1) c'est-à-dire de considérer un problème du type Neumann, et non plus Dirichlet.

9. Observations sur la surface. Cas déterministe.

9.1 Hypothèses - Notations[1].

Nous considérons le modèle

$$Ay + vy = f \quad \text{p.p. } \Omega \tag{9.1}$$

$$y|_\Gamma = 0. \tag{9.2}$$

L'observation est la dérivée normale, soit

$$z = \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\bigg|_\Gamma = \psi \in L^2(\Gamma). \tag{9.3}$$

On suppose que la valeur ψ de la dérivée normale de y est observée sans erreur. Le problème consiste à identifier $v \in L^\infty(\Omega)$ avec $v \in \mathscr{U}_{ad}$

$$\mathscr{U}_{ad} = \{ v \mid 0 \leqslant v(x) \leqslant \beta \quad \text{p.p.} \}, \tag{9.4}$$

de façon que (9.1), (9.2), (9.3) soient compatibles. *Nous supposons que le problème possède une solution,* c'est-à-dire que pour la valeur ψ considérée, il existe effectivement un couple $\{ v, y \}$ tel que (9.1), (9.2) et (9.3) soient vérifiées, avec $v \in \mathscr{U}_{ad}$. Bien entendu, il n'y a pas unicité en général. L'idée de la méthode[2] consiste à introduire deux fonctions y_1 et y_2 définies par

$$y_1 \equiv y_1(v) \text{ est la solution de } \begin{cases} Ay + vy_1 = f \\ y_1|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

$$y_2 \equiv y_2(v) \text{ est la solution de } \begin{cases} Ay_2 + vy_2 = f \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial \nu_A}\bigg|_\Gamma = \psi. \end{cases} \tag{9.6}$$

Il existe donc un élément de $\mathscr{U}_{ad}$ (au moins) tel que

$$y_1(v) = y_2(v). \tag{9.7}$$

Pour trouver un élément vérifiant (9.7), on minimise la fonctionnelle

$$J(v) = |y_1(v) - y_2(v)|_H. \tag{9.8}$$

En fait, nous allons étudier directement une fonctionnelle discrétisée. Nous posons, comme en 7.2

$$V_h = \{ y_h \mid y_h(x) = \sum_{M \in S_h^0(\Omega)} y_h(M)\, W_{hM}(x) \}, \tag{9.9}$$

et nous définissons $\overline{V}_h$ par

$$\overline{V}_h = \{ z_h \mid z_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^1} z_h(M)\, W_{hM}(x) \}^{[3]}. \tag{9.10}$$

Posons

$$\overline{\mathscr{V}} = \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \quad (\overline{\mathscr{V}} \text{ est dense dans } H^1(\Omega)). \tag{9.11}$$

Nous introduisons sur $\overline{V}_h$ la norme

$$\| z_h \|_h = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\delta_i z_h|^2\, dx + \int_\Omega |z_h|^2\, dx \right)^{1/2}. \tag{9.12}$$

Soit $\overline{p}_h$ le prolongement $\in \mathscr{L}(\overline{V}_h; F)$ défini par

$$\overline{p}_h z_h = (z_h, \delta_1 z_h, \ldots, \delta_n z_h) \tag{9.13}$$

---

(1) Les notations non définies sont identiques à (7.2).
(2) Nous renvoyons également à [6] et [35].
(3) Cet espace avait été désigné par V_h en (2.4). Nous sommes obligés de changer de notation.

et $r_h \in \mathcal{L}(H; \overline{V}_h)$ définie par

$$\overline{r}_h f(M) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\sigma_h(M;0) \cap \Omega} f \, dx ; \; M \in \Omega_h^1. \tag{9.14}$$

Si $z \in H^1(\Omega)$, γz représente la *trace* de la fonction z sur la frontière Γ. On démontre (cf. [34]) que γz est à valeur dans $L^2(\Gamma)$ (et même dans $H^{1/2}(\Gamma)$). De plus γ est un opérateur linéaire et continu de $H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$.

Nous aurons à considérer également la trace des fonctions étagées z_h, qui ne sont pas des éléments de $H^1(\Omega)$, mais des éléments de $L^2(\Omega)$. La trace γz_h a néanmoins un sens et appartient à $L^2(\Gamma)$, mais γ n'est plus un opérateur continu. Soit enfin ρ_h l'opérateur $\in \mathcal{L}(L^2(\Gamma); \overline{V}_h)$ défini par

$$(\rho_h \Psi)(M) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_\Gamma \Psi(\gamma W_{hM}) d\Gamma ; \; M \in \Omega_h^1 ; \; \Psi \in L^2(\Gamma). \tag{9.15}$$

Nous avions introduit en (7.17) un opérateur $A_h \in \mathcal{L}(V_h; V_h)$. Nous considérons également ici l'opérateur $\overline{A}_h \in \mathcal{L}(V_h; V_h)$ défini par

$$\left.\begin{aligned} (\overline{A}_h z_h)(M) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) (\delta_j z_h)(\delta_i W_{hM}) + a_0(x) z_h W_{hM} \right] dx \\ \forall \, M \in \Omega_h^1 \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

et nous considérons la fonctionnelle de trois variables

$$J_{\epsilon,h}(y_h^1, y_h^2, v_h) = |y_h^1 - y_h^2|_H^2 + \frac{1}{\epsilon} |A_h y_h^1 + r_h(v_h y_h^1) - r_h f|_H^2 \tag{9.17}$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} |A_h y_h^2 + \overline{r}_h(v_h y_h^2) - \overline{r}_h f - \rho_h \Psi|_H^2$$

pour $y_h^1 \in V_h$, $y_h^2 \in \overline{V}_h$ et $v_h \in \mathcal{U}_{ad}^h$;

$J_{\epsilon h}(y_h^1, y_h^2, v_h)$ est une fonctionnelle d'un nombre fini de variables, $y_h^1(M), M \in S_h^0(\Omega)$, $y_h^2(P), P \in \Omega_h^1$ et $v_h(Q), Q \in \dot{\Omega}_h^0$.

9.2. Existence d'un minimum de la fonctionnelle approchée.

Proposition 9.1 : Il existe un triplet (au moins) $y_{h\epsilon}^1, y_{h\epsilon}^2, v_{h\epsilon}$ vérifiant

$$J_{\epsilon,h}(y_{h\epsilon}^1, y_{h\epsilon}^2, v_{h\epsilon}) = \inf_{\substack{y_h^1 \in V_h \\ y_h^2 \in \overline{V}_h \\ v_h \in \mathcal{U}_{ad}^h}} J_{\epsilon,h}(y_h^1, y_h^2, v_h). \tag{9.18}$$

Démonstration : Soit $y_{hn}^1, y_{hn}^2, v_{hn}$ une suite minimisante de $J_{\epsilon,h}$. Les variables $v_{hn}(Q), Q \in \dot{\Omega}_h^0$ sont bornées par β. Montrons qu'il en est de même pour les variables $y_{hn}^1(M), M \in S_h^0(\Omega)$ et $y_{hn}^2(P), P \in \Omega_h^1$. En effet, on voit, comme pour la proposition 7.1 que les quantités

$$\xi_{n1} = A_h y_{hn}^1 + r_h(v_{hn} y_{hn}^1) \tag{9.19}$$

et

$$\xi_{n2} = \overline{A}_h y_{hn}^2 + \overline{r}_h(v_{hn} y_{hn}^2) \tag{9.20}$$

demeurent, lorsque $n \to +\infty$, dans des bornés de $L^2(\Omega)$. On suit alors le même raisonnement que pour la proposition 7.1, et on montre que $\|p_h y_{hn}^1\|_{H_0^1(\Omega)}$ et $\|\overline{p}_h y_{hn}^2\|_{H^1(\Omega)}$

sont bornés, lorsque $n \to +\infty$. Il en est de même pour $|\rho_h\, y^1_{hn}|^2_H$ et $|\overline{\rho}_h\, y^2_{hn}|^2_H$, donc finalement aussi pour y^1_{hn} (M) et y^2_{hn} (P), (M $\in S^0_h(\Omega)$ et P $\in \Omega^1_h$). On extrait des sous suites convergentes vers des limites $y^1_{h\epsilon}$ (M), $y^2_{h\epsilon}$ (P), $v_{h\epsilon}$ (Q) qui réalisent la borne inférieure de $J_{\epsilon,h}$ cf. Proposition 7.1). ■

Nous allons maintenant faire tendre ϵ et h vers 0. Nous aurons besoin de l'hypothèse supplémentaire.

la frontière Γ est *régulière* au sens de J. CEA [15]. *(9.21)*

9.3. **Convergence.**

Théorème 9.1 : Hypothèses et notations de (7.2) et (9.1), hypothèse (9.21). Les suites $y^1_{h\epsilon}$, $y^2_{h\epsilon}$, $v_{h\epsilon}$ définies par (9.18), vérifient *lorsque* $h, \epsilon \to 0$ *simultanément :*

$(p_h\, y^1_{h\epsilon}, \overline{p}_h\, y^2_{h\epsilon}, v_{h\epsilon})$ demeure dans un borné de $F \times F \times L^\infty(\Omega)$. *(9.22)*

$y^1_{h\epsilon} - y^2_{h\epsilon} \to 0$ dans $L^2(\Omega)$. *(9.23)*

Soit, encore notée $p_h\, y^1_{h\epsilon}, \overline{p}_h\, y^2_{h\epsilon}\, v_{h\epsilon}$, une sous suite extraite faiblement convergente vers ψ^*_1, ψ^*_2, v^* dans $F \times F \times L^\infty(\Omega)$, alors $\psi^*_1 = \psi^*_2 = \varpi y^*$, et le couple v_λ, y_λ est un couple *compatible*, (*i. e*) satisfait à (9.1), (9.2) et (9.3). *(9.24)*
De plus $p_h\, y^1_{h\epsilon}, \overline{p}_h\, y^2_{h\epsilon}$ convergent *fortement* dans F vers ϖy^*.

Démonstration :

a) *démonstration de (9.22).*

Pour $v_{h\epsilon}$, cela résulte du fait que $\mathscr{U}_{ad}$ est borné. Soit v_0, y_0 un couple compatible, *i. e*, vérifiant (9.1), (9.2) et (9.3). Considérons les équations

$$A_h y^1_h + r_h(s_h v_0 y^1_h) = r_h f. \qquad (9.25)$$

$$\overline{A}_h y^2_h + \overline{r_h}(s_h v_0 y^2_h) = \overline{r_h} f + \rho_h \Psi. \qquad (9.26)$$

L'équation (9.25) est identique à (7.30), et nous savons, d'après le théorème 7.1 que

$$y^1_h \underset{h \to 0}{\to} y_0 = y_1(v_0) \text{ (défini en (9.5))}, \textit{ fortement dans } L^2(\Omega). \qquad (9.27)$$

L'équation (9.26) (qui possède aussi une solution unique) donne

$$(\overline{A}_h y^2_h, y^2_h)_H + (\overline{r_h}(s_h v_0 y^2_h), y^2_h)_H = (\overline{r_h} f, y^2_h)_H + (\rho_h \Psi, y^2_h)_H \qquad (9.28)$$

soit

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(\delta_j\, y^2_h)(\delta_i\, y^2_h) + a_0(x)(y^2_h)^2 \right] dx + \int_\Omega s_h v_0 (y^2_h)^2\, dx \qquad (9.29)$$
$$= \int_\Gamma \Psi(\gamma\, y^2_h)\, d\Gamma + \int_\Omega f\, y^2_h\, dx$$

d'où

$$\alpha \|\overline{p}_h\, y^2_h\|^2_F \leqslant |\Psi|_{L^2(\Gamma)} |\gamma\, y^2_h|_{L^2(\Gamma)} + |f|_H |y^2_h|_H. \qquad (9.30)$$

Nous utilisons alors le résultat suivant (vrai grâce à (9.21) cf. [15]) :

$$|\gamma\, y^2_h|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \|\overline{p}_h\, y^2_h\|_F. \qquad (9.31)$$

Il résulte alors de (9.30) et (9.31) que

$$\|\overline{p}_h\, y^2_h\|_F \leqslant \text{Constante}. \qquad (9.32)$$

On raisonne alors, comme pour le théorème 7.1. Soit une sous suite, encore notée $\overline{p}_h y_h^2$, extraite et faiblement convergente dans F vers $\psi*$, alors $\psi* = \varpi\, y*$, et grâce à la propriété de compacité discrète, on a

$$y_h^2 \underset{h \to 0}{\to} y^* \quad \textit{fortement} \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{9.33}$$

$$\delta_i\, y_h^2 \underset{h \to 0}{\to} \frac{\delta y^*}{\delta x_i} \textit{faiblement} \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{9.34}$$

Prenons alors $\varphi \in \overline{\mathscr{V}} = \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ et soit $\varphi_h = \sum_{M \in \Omega_h^1} [\mathscr{P}\varphi(M)]\, W_{hM}(x)$, où $\mathscr{P}$ est l'opérateur de 1. prolongement (cf. 2.4). On sait que

$$p_h \varphi_h \underset{h \to 0}{\to} \varpi\, \varphi \text{ dans F fortement.} \tag{9.35}$$

L'équation (9.26) donne alors

$$(\overline{A}_h\, y_h^2, \varphi_h)_H + (\overline{r}_h (s_h v_0\, y_h^2), \varphi_h)_H = (\rho_h\, \psi\, , \varphi_h)_H + (\overline{r}_h f\, , \varphi_h)_H\, . \tag{9.36}$$

Soit

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\, (\delta_j\, y_h^2)\, (\delta_i\, \varphi_h) + a_0(x)\, y_h^2\, \varphi_h \right] dx + \int_\Omega (s_h v_0)\, y_h^2\, \varphi_h\, dx \tag{9.37}$$

$$= \int_\Gamma \psi\, \gamma\, \varphi_h\, d\Gamma + \int_\Omega f\, \varphi_h\, dx.$$

D'après le théorème 7.1, on a

$$s_h v_0 y_h^2 \underset{h \to 0}{\to} v_0 y^* \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) \tag{9.38}$$

et (9.35) implique

$$\varphi_h \underset{h \to 0}{\to} \varphi \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \tag{9.39}$$

$$\delta_i \varphi_h \underset{h \to 0}{\to} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \tag{9.40}$$

De plus on a

$$\gamma\, \varphi_h \to \gamma\, \varphi \text{ fortement dans } L^2(\Gamma). \tag{9.41}$$

On peut alors passer à la limite dans (9.37). Il vient

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\delta y^*}{\delta x_j} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} + a_0(x)\, y^*\, \varphi \right] dx + \int_\Omega v_0 y^* \varphi\, dx = \int_\Gamma \psi\, \gamma\, \varphi\, d\Gamma + \int_\Omega f \varphi\, dx \\ &\forall\, \varphi \in \overline{\mathscr{V}}, \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

donc

$$y^* = y_2(v_0) \tag{9.43}$$

et

$$y_h^2 \to y_0 = y_2(v_0) \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement.} \tag{9.44}$$

Donc, en tenant compte de (9.27) et (9.44), on obtient

$$J_{\epsilon,h}(y_h^1, y_h^2, s_h v_0) \underset{\epsilon\, ,\, h \to 0}{\to} 0. \tag{9.45}$$

Or on a

$$J_{\epsilon,h}(y^1_{h\epsilon}, y^2_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \leqslant J_{\epsilon,h}(y^1_h, y^2_h, s_h v_0) \tag{9.46}$$

donc

$$J_{\epsilon,h}(y^1_{h\epsilon}, y^2_{h\epsilon}, v_{h\epsilon}) \underset{h,\epsilon\to 0}{\to} 0 \tag{9.47}$$

ce qui implique (9.23) et

$$\frac{1}{\epsilon}|A_h y^1_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon} y^1_{h\epsilon}) - r_h f|^2_H \underset{\epsilon,h\to 0}{\to} 0. \tag{9.48}$$

$$\frac{1}{\epsilon}|\bar{A}_h y^2_{h\epsilon} + \bar{r}_h(v_{h\epsilon} y^2_{h\epsilon}) - \bar{r}_h f - \rho_h \psi|^2_H \underset{\epsilon,h\to 0}{\to} 0. \tag{9.49}$$

De (9.48) on déduit comme pour le théorème 7.1 que

$$\|p_h y^1_{h\epsilon}\|_F \leqslant \text{Constante}. \tag{9.50}$$

De (9.49) on déduit, par un raisonnement identique à celui fait plus haut de (9.28) à (9.32)

$$\|\bar{p}_h y^2_{h\epsilon}\|_F \leqslant \text{Constante}, \tag{9.51}$$

ce qui démontre (9.22).

b) *démonstration de (9.24).*

Soit, encore notée $p_h\ y^1_{h\epsilon}$, $\bar{p}_h\ y^2_{h\epsilon}$, $v_{h\epsilon}$ une sous suite extraite faiblement convergente. On a

$$v_{h\epsilon} \underset{h,\epsilon\to 0}{\to} v^* \text{ dans } L^\infty(\Omega), \text{ dual faible de } L^1(\Omega) \tag{9.52}$$

$$p_h y^1_{h\epsilon} \underset{h,\epsilon\to 0}{\to} \varpi\ y^* \text{ dans F faiblement; } y^* \in H^1_0(\Omega) \tag{9.53}$$

$$\bar{p}_h y^2_{h\epsilon} \underset{h,\epsilon\to 0}{\to} \varpi\ y^{**} \text{ dans F faiblement.} \tag{9.54}$$

De (9.48), on déduit pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(A_h y^1_{h\epsilon}, r_h\varphi)_H + (v_{h\epsilon} y^1_{h\epsilon}, r_h\varphi)_H - (f, r_h\varphi)_H \underset{h,\epsilon\to 0}{\to} 0 \tag{9.55}$$

soit

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\delta y^*}{\delta x_j} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} + a_0(x)\ y^*\ \varphi \right] dx + \int_\Omega v^*\ y^*\ \varphi\ dx \tag{9.56}$$

$$= \int_\Omega f\ \varphi\ dx\ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc

$$y^* = \gamma_1(v^*). \tag{9.52}$$

De (9.49) on déduit, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$

$$(\bar{A}_h y^2_{h\epsilon}, \varphi_h)_H + (v_{h\epsilon} y^2_{h\epsilon}, \varphi_h)_H - (\psi, \gamma\varphi_h)_{L^2(\Gamma)} - (f, \varphi_h)_{L^2(\Omega)} \underset{h,\epsilon\to 0}{\to} 0. \tag{9.53}$$

d'où

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\delta y^{**}}{\delta x_j} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} + a_0(x)\ y^{**}\ \varphi \right] dx + \int_\Omega v^*\ y^{**}\ \varphi\ dx \tag{9.54}$$

$$= \int_\Omega f\varphi\ dx + \int_\Gamma \psi\ \gamma\ \varphi\ d\Gamma$$

soit

$$y^{**} = \gamma_2 (v^*) , \tag{9.55}$$

et

$$| \gamma_{h\varepsilon}^1 - \gamma_{h\varepsilon}^2 | \underset{\varepsilon,\, h \to 0}{\to} |\gamma_1 (v^*) - \gamma_2 (v^*)|_H . \tag{9.56}$$

Grâce à (9.23) il est clair que

$$y^* = \gamma_1 (v^*) = \gamma_2 (v^*) . \tag{9.57}$$

La convergence forte de $p_h \gamma_{h\varepsilon}^1$, se déduit sans difficulté, comme pour le théorème 7.1.

La convergence forte de $p_h \gamma_{h\varepsilon}^2$ vers ϖy^* , s'obtient en utilisant un résultat de J. CEA [15], qui montre que si $p_h \gamma_{h\varepsilon}^2$ converge faiblement dans F, alors la limite (qui est forcément de la forme ϖy^*) vérifie

$$\gamma \gamma_{h\varepsilon}^2 \to \gamma y^* \text{ faiblement dans } L^2 (\Gamma) . \tag{9.58}$$

On a alors

$$(\overline{A}_h \gamma_{h\varepsilon}^2 , \gamma_{h\varepsilon}^2)_H + (v_{h\varepsilon} \gamma_{h\varepsilon}^2 , \gamma_{h\varepsilon}^2)_H - (\psi, \gamma \gamma_{h\varepsilon}^2)_{L^2 (\Gamma)} - (f, \gamma_{h\varepsilon}^2)_H \underset{h,\, \varepsilon \to 0}{\to} 0 . \tag{9.59}$$

Comme

$$(v_{h\varepsilon} \gamma_{h\varepsilon}^2 , \gamma_{h\varepsilon}^2)_H - (\psi, \gamma \gamma_{h\varepsilon}^2)_{L^2 (\Gamma)} - (f, \gamma_{h\varepsilon}^2)_H \to (v^* \gamma^*, \gamma^*)_H - (\psi, \gamma \gamma^*)_{L^2 (\Gamma)} - (f, \gamma^*)_H , \tag{9.60}$$

on voit que

$$(\overline{A}_h \gamma_{h\varepsilon}^2 , \gamma_{h\varepsilon}^2)_H \to \sum_{i,\, j = 1}^{n} \left[\int_\Omega a_{i,\, j} (x) \frac{\delta y^*}{\delta x_j} \frac{\delta y^*}{\delta x_i} dx \right] + \int_\Omega a_0 (x) (y^*)^2 dx , \tag{9.61}$$

ce qui, comme pour le théorème 7.1, suffit à assurer la convergence forte.

Remarque 9.1 : Pour identifier v dans le modèle (9.1), (9.2), (9.3) une méthode « naturelle » consisterait à introduire la fonctionnelle

$$\left| \frac{\delta y}{\delta \nu_A} \right|_\Gamma - \psi \Big|^2_{L^2 (\Gamma)} + \frac{1}{\varepsilon} \Big| A y + v y - f \Big|^2_H \tag{9.62}$$

$$\text{pour } y \in Y = \left\{ y \,|\, y \in H_0^1 (\Omega) , A y \in L^2 (\Omega) \text{ et } \frac{\delta y}{\delta \nu_A} \Big|_\Gamma \in L^2 (\Gamma) \right\} .$$

Il s'agit ensuite de discrétiser (9.62). Le problème est que, en dehors du cas où Ω est un rectangle, on rencontre de grosses difficultés à définir une discrétisation de la dérivée normale $\frac{\delta y}{\delta \nu_A}$. La méthode proposée, par l'introduction de deux fonctions γ_1 , γ_2 permet d'éviter cette difficulté. Cependant, on augmente ainsi beaucoup le nombre des variables de la fonctionnelle discrétisée, puisqu'il y a deux fonctions au lieu d'une.

Remarque 9.2 : La méthode s'adapte au cas où $y|_\Gamma$ n'est pas nul, mais on rencontre des difficultés au moment de la discrétisation, dues au fait que l'on traite un problème de Dirichlet *non* homogène.

10 - Observations sur la surface. Cas stochastique.

10.1 - Le Problème. Hypothèses - Notations.

Nous considérons le modèle

$$A y + v y = f \qquad p.\,p.\ \Omega \tag{10.1}$$

$$y|_\Gamma = 0 , \tag{10.2}$$

v est le paramètre à identifier. Nous supposons que la frontière Γ et les coefficients de A sont assez réguliers pour que la solution $y(v)$ de (10.1), (10.2) appartienne à $H^2(\Omega)$ (cf. [37])[1]. Dans ces conditions la dérivée normale $\left.\frac{\delta y}{\delta \nu_A}\right|_\Gamma$ appartient à $L^2(\Gamma)$ (cf. [34]). Nous observons la dérivée normale avec une erreur de type bruit blanc. Autrement dit, on peut écrire

$$\left.\frac{\delta y}{\delta \nu_A}\right|_\Gamma = \psi + \eta\,, \tag{10.3}$$

$\psi \in L^2(\Gamma)$. A η est associée une mesure cylindrique sur $L^2(\Gamma)$, d'espérance mathématique 0, et d'opérateur de covariance Λ *inversible.* Nous posons alors le problème de la façon suivante. On appelle X l'ensemble

$$X = \{\, y_1\,,\ y_2\,,\ v, w \mid y_1 \in H_0^1(\Omega)\,,\ y_2 \in H^1(\Omega)\,,\ v \in L^\infty(\Omega)\,,\ w \in L^2(\Gamma) \text{ vérifiant } (10.5)\,, \ldots (10.11) \,\} \tag{10.4}$$

$$v \in \mathscr{U}_{ad} \subset L^\infty(\Omega) \tag{10.5}$$

$$w \in W_{ad}\,, \text{ convexe fermé borné de } L^2(\Gamma) \tag{10.6}$$

$$A y_1 + v y_1 = f \qquad p.\,p.\ \Omega \tag{10.7}$$

$$A y_2 + v y_2 = f \qquad p.\,p.\ \Omega \tag{10.8}$$

$$y_1|_\Gamma = 0 \tag{10.9}$$

$$\left.\frac{\delta y_2}{\delta \nu_A}\right|_\Gamma = w \tag{10.10}$$

$$y_1 = y_2 \qquad p.\,p.\ \Omega\,. \tag{10.11}$$

On fait l'hypothèse

X est non vide. (10.12)

On désigne par m un élément de X, $m = \{ y_1\,, y_2\,, v, w \}$. Le problème consiste alors à trouver des éléments m de X, réalisant la borne inférieure sur X, du critère

$$J(m) = \left(\Lambda^{-1}(\psi - w)\,,\ \psi - w\right)_{L^2(\Gamma)}. \tag{10.13}$$

Proposition 10.1 : Il existe un élément m_0 au moins, vérifiant

$$J(m_0) = \inf_{m \in X} J(m)\,. \tag{10.14}$$

Démonstration : Soit m_n une suite minimisante. De

$$\left.\begin{aligned} &A y_{1n} + v_n\, y_{1n} = f \\ &y_{1n}|_\Gamma = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.15}$$

et du fait que v_n est borné de $L^\infty(\Omega)$ et positif, on déduit

$$\| y_{1n} \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \text{Constante} \quad \text{lorsque } n \to +0\,. \tag{10.16}$$

De même, de

$$\left.\begin{aligned} &A y_{2n} + v_n\, y_{2n} = f \\ &\left.\frac{\delta y_{2n}}{\delta \nu_A}\right|_\Gamma = w_n \end{aligned}\right\} \tag{10.17}$$

et du fait que w_n est borné dans $L^2(\Gamma)$, on déduit

$$\| y_{2n} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{Constante}. \tag{10.18}$$

---

(1) Bien entendu le modèle (10.1), (10.2) a la même signification qu'au n° 24.

On peut alors extraire une sous suite, encore notée m_n, faiblement convergente dans $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ vers un élément m_0. Montrons que $m_0 \in X$. En effet, si $m_0 = \{ y_1^0, y_2^0, v^0, w^0 \}$, il est clair que $v^0 \in \mathscr{U}_{ad}$ et $w^0 \in W_{ad}$, car $\mathscr{U}_{ad}$ (respectivement W_{ad}) sont des convexes fermés (donc faiblement fermés) de $L^\infty(\Omega)$ (respectivement $L^2(\Gamma)$). Comme les injections de $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ sont *compactes*, on a

$$y_{1n} \to y_1^0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement} \tag{10.19}$$

$$y_{2n} \to y_2^0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \textit{ fortement}. \tag{10.20}$$

Comme pour la proposition 5.2 on a

$$A y_1^0 + v^0 \; y_1^0 = f \; ; \; y_1^0 \in H_0^1(\Omega). \tag{10.21}$$

Soit d'autre part $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, (10.17) donne

$$(A y_{2n}, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (v_n \, y_{2n}, \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (w_n, \gamma\varphi)_{L^2(\Gamma)}. \tag{10.22}$$

Or $v_n \, y_{2n} \to v_0 \, y_2^0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. On peut donc passer à la limite dans (10.22). Il vient

$$(A y_2^0, \varphi)_H + (v_0 \; y_2^0, \varphi)_H = (f, \varphi)_H + (w^0, \gamma\varphi)_{L^2(\Gamma)}, \tag{10.23}$$

soit

$$\left.\begin{aligned} &A y_2^0 + v_0 \; y_2^0 = f \\ &\frac{\delta y_2^0}{\delta \nu_A} = w_0 \; . \end{aligned}\right\} \tag{10.24}$$

Enfin $0 = | y_{1n} - y_{2n} |_{L^2(\Omega)} \to | y_1^0 - y_2^0 |_{L^2(\Omega)}$, donc $y_1^0 = y_2^0$ *p. p.* Ω.

Par conséquent $m_0 \in X$. Mais on a

$$(\Lambda^{-1}(\psi - w_0), \psi - w_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} (\Lambda^{-1}(\psi - w_n), \psi - w_n) = \inf_{m \in X} J(m), \tag{10.25}$$

ce qui implique (10.14).

10.2 - Fontionnelle discrétisée.

Les notations sont les mêmes qu'en 9.1. Nous avons besoin, en plus, d'une famille d'approximation stable et convergente de $L^2(\Gamma)$. Posons

$$\Gamma_h^0 = \{ M \mid M \in \mathscr{R}_h \; , \Gamma M = \Gamma \cap \sigma_h(M; 0) \neq \Phi \}. \tag{10.26}$$

Soit W_h l'espace des fonctions de $L^2(\Gamma)$ définies par

$$W_h = \{ w_h \mid w_h(x) = \sum_{M \in \Gamma_h^0} w_h(M) \, \theta_h^M(x) \} \tag{10.27}$$

où

$$\theta_h^M = \text{fonction caractéristique de } \Gamma M \, , \, M \in \Gamma_h^0. \tag{10.28}$$

Soit $\zeta_h \in \mathscr{L}(L^2(\Gamma) ; W_h)$ l'application définie par

$$(\zeta_h z)(M) = \frac{1}{mes \, \Gamma M} \int_{\Gamma M} z \, d\Gamma \; ; \; M \in \Gamma_h^0 \; ; \; z \in L^2(\Gamma). \tag{10.29}$$

Nous introduisons la fonctionnelle discrétisée

$$\left.\begin{aligned} J_{\epsilon h}(y_h^1, y_h^2, v_h, w_h) &= \left(\Lambda^{-1}(\psi - w_h), \psi - w_h\right)_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{\epsilon}\left| y_h^1 - y_h^2 \right|_H^2 \\ &+ \frac{1}{\epsilon}\left| A_h\, y_h^1 + r_h(v_h\, y_h^1) - r_h\, f \right|_H^2 \\ &+ \frac{1}{\epsilon}\left| \overline{A}_h\, y_h^2 + \overline{r}_h(v_h\, y_h^2) - \overline{r}_h\, f - \rho_h\, w_h \right|_H^2 \end{aligned}\right\} \quad (10.30)$$

pour $y_h^1 \in V_h$, $y_h^2 \in \overline{V}_h$, $v_h \in \mathcal{U}_{ad}^h$, $w_h \in W_{ad}^h = \{ W_{ad} \cap W_h \}$.

Nous avons

Proposition 10.2 : Il existe un quadruplet (au moins) $m_{h\epsilon} = \{ y_{h\epsilon}^1, y_{h\epsilon}^2, v_{h\epsilon}, w_{h\epsilon} \}$ vérifiant

$$J_{\epsilon h}(y_{h\epsilon}^1, y_{h\epsilon}^2, v_{h\epsilon}, w_{h\epsilon}) = \inf_{\substack{y_h^1 \in V_h\ ;\ y_h^2 \in \overline{V}_h \\ v_h \in \mathcal{U}_{ad}^h\ ;\ w_h \in W_{ad}^h}} J_{\epsilon h}(y_h^1, y_h^2, v_h, w_h). \quad (10.31)$$

Démonstration : Soit $m_{hn} = \{ y_{hn}^1, y_{hn}^2, v_{hn}, w_{hn} \}$ une suite minimisante.

Les variables réelles v_{hn} (M) , $M \in \Omega_h^0$ sont bornées par β. Comme $w_{hn} \in W_{ad}$, les variables réelles w_{hn} (N) , $N \in \Gamma_h^0$ sont aussi bornées, lorsque $n \to +\infty$. De même $\xi_{n1} = A_h\, y_{hn}^1 + r_h(v_{hn}\, y_{hn}^1)$ est borné dans $L^2(\Omega)$. Comme pour la proposition 7.1, cela entraîne que les variables y_{hn}^1 (P) , $P \in S_h^0(\Omega)$ demeurent bornées, lorsque $n \to +\infty$.

D'autre part

$$\xi_{n2} = \overline{A}_h\, y_{hn}^2 + \overline{r}_h(v_{hn}\, y_{hn}^2) - \rho_h\, w_{hn}, \quad (10.32)$$

demeure borné dans $L^2(\Omega)$, lorsque $n \to +\infty$. Or on a

$$(\xi_{n2}, y_{hn}^2)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)(\delta_j\, y_{hn}^2)(\delta_i\, y_{hn}^2) + a_0(x)(y_{hn}^2)^2 \right] dx \quad (10.33)$$
$$+ \int_\Omega v_{hn}(y_{hn}^2)^2\, dx - \int_\Gamma w_{hn}(\gamma\, y_{hn}^2)\, d\Gamma .$$

Grâce au fait que

$$|\gamma\, y_{hn}^2|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \| p_h\, y_{hn}^2 \|_F \quad (10.34)$$

et que

$$|w_{hn}|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \text{Constante lorsque } n \to +\infty, \quad (10.35)$$

on déduit aisément de (10.33) que l'on a

$$|y_{hn}^2|_{L^2(\Omega)} \leqslant \text{Constante}. \quad (10.36)$$

Donc les variables y_{hn}^2 (R) , $R \in \Omega_h^1$ sont bornées également. Ceci suffit pour démontrer la proposition (même démonstration que la proposition 7.1).

10.3 - Convergence.

Nous faison tendre ϵ et h simultanément vers 0.

Théorème 10.1 : Hypothèses et notations de 10.1. Les suites $m_{h\epsilon}$ définies en (10.31) vérifient, lorsque h, $\epsilon \to 0$ *simultanément.*

$$\left(\Lambda^{-1}(\psi - w_{h\epsilon}), \psi - w_{h\epsilon}\right) \to \inf_{m \in X} J(m) \quad (10.37)$$

$$|y_{h\epsilon}^1 - y_{h\epsilon}^2|_H \to 0 \quad (10.38)$$

$$|A_h\, y^1_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon}\, y^1_{h\epsilon}) - r_h\, f|_H \to 0 \qquad (10.39)$$

$$|\overline{A}_h\, y^2_{h\epsilon} + \overline{r}_h(v_{h\epsilon}\, y^2_{h\epsilon}) - \overline{r}_h\, f - \rho_h\, w_{h\epsilon}|_H \to 0 \qquad (10.40)$$

$(\rho_h\, y^1_{h\epsilon},\ \overline{\rho}_h\, y^2_{h\epsilon},\ v_{h\epsilon},\ w_{h\epsilon})$ demeure dans un borné de $F \times F \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Gamma)$. (10.41)

Soit, encore notée $(\rho_h\, y^1_{h\epsilon},\ \overline{\rho}_h\, y^2_{h\epsilon},\ v_{h\epsilon},\ w_{h\epsilon})$, une sous suite extraite faiblement convergente dans $F \times F \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ vers $\{\varpi y^*,\ \varpi y^{**},\ v^*,\ w^*\}$, alors $m^* = \{y^*,\ y^{**},\ v^*,\ w^*\}$ est un élément de X vérifiant $J(m^*) = \inf_{m \in X} J(m)$. De plus $\rho_h\, y^1_{h\epsilon}$ et $\overline{\rho}_h\, y^2_{h\epsilon}$ convergent vers y^*, *fortement* dans F. (10.42)

Démonstration.

a) **propriétés (10.38) ... (10.41).**

Soit $m_0 \in X$ vérifiant $J(m_0) = \inf_{m \in X} J(m)$ et $m_0 = \{y^0_1,\ y^0_2,\ v_0,\ w_0\}$.

Considérons les équations

$$A_h\, \tilde{y}^1_h + r_h(s_h\, v_0\, \tilde{y}^1_h) - r_h f = 0 \qquad (10.43)$$

$$\overline{A}_h\, \tilde{y}^2_h + \overline{r}_h(s_h\, v_0\, \tilde{y}^2_h) - \overline{r}_h f - \rho_h\, \zeta_h\, w_0 = 0\,. \qquad (10.44)$$

On voit, comme pour le théorème 9.1, et grâce au fait que $|\zeta_h\, w_0|_{L^2(\Gamma)} \leqslant$ Cte,

que l'on a

$$\|\, p_h\, \tilde{y}^1_h\,\|_F \leqslant \text{Constante} \qquad (10.45)$$

$$\|\, \overline{p}_h\, \tilde{y}^2_h\,\|_F \leqslant \text{Constante}. \qquad (10.46)$$

Nous avons

$$J_{\epsilon h}(m_{h\epsilon}) \leqslant J_{\epsilon h}(\tilde{y}^1_h,\ \tilde{y}^2_h,\ s_h\, v_0,\ \zeta_h\, w_0) \qquad (10.47)$$

$$= (\Lambda^{-1}(\psi - \zeta_h\, w_0),\ \psi - \zeta_h\, w_0) + \frac{1}{\epsilon}|\tilde{y}^1_h - \tilde{y}^2_h|_H\,.$$

Gardons ϵ fixe, et faisons tendre h vers 0. Grâce au fait que

$$\tilde{y}^1_h \to y^0_1 \text{ dans H fortement} \qquad (10.48)$$

et que

$$\tilde{y}^2_h \to y^0_2 \text{ dans H fortement,} \qquad (10.49)$$

nous avons, puisque $y^0_1 = y^0_2$

$$\lim_{h \to 0} (\Lambda^{-1}(\psi - \zeta_h\, w_0),\ \psi - \zeta_h\, w_0) + \frac{1}{\epsilon}\left|\tilde{y}^1_h - \tilde{y}^2_h\right|_H = J(m_0)\,, \qquad (10.50)$$

donc

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{h \to 0} (\Lambda^{-1}(\psi - \zeta_h\, w_0),\ \psi - \zeta_h\, w_0) + \frac{1}{\epsilon}\left|\tilde{y}^1_h - \tilde{y}^2_h\right|_H = J(m_0)\,, \qquad (10.51)$$

d'où on déduit

$$\liminf_{\epsilon, h \to 0} J_{\epsilon h}(m_{h\epsilon}) \leqslant J(m_0)\,. \qquad (10.52)$$

Par ailleurs de (10.47), on déduit que $\epsilon\, J_{\epsilon h}(m_{h\epsilon}) \underset{h,\, \epsilon \to 0}{\to} 0$, ce qui entraîne (10.38), (10.39), (10.40), donc aussi

$$|A_h\, y^1_{h\epsilon} + r_h(v_{h\epsilon}\, y^1_{h\epsilon})|_H \leqslant \text{Constante lorsque } h,\ \epsilon \to 0 \qquad (10.53)$$

$$|\overline{A}_h\, y^2_{h\epsilon} + \overline{r}_h\,(v_{h\epsilon}\, y^2_{h\epsilon}) - \rho_h\, w_{h\epsilon}|_H \leqslant \text{Constante lorsque } h,\ \epsilon \to 0\,. \qquad (10.54)$$

On en déduit, comme pour le théorème 9.1, que l'on a (10.41).

b) **propriétés (10.37) et (10.42)**

Soit, encore notée $m_{h\epsilon}$ une sous suite extraite, convergeant faiblement dans $F \times F \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ vers ψ^*, ψ^{**}, v^*, w^*. On sait alors que l'on a

$$\psi^* = \varpi\, y^* \qquad (10.55)$$

$$\psi^{**} = \varpi\, y^{**} \qquad (10.56)$$

$$\rho_h\, y^1_{h\epsilon} \to \varpi\, y^* \text{ faiblement dans F} \qquad (10.57)$$

$$\overline{\rho}_h\, y^2_{h\epsilon} \to \varpi\, y^{**} \text{ faiblement dans F} \qquad (10.58)$$

$$v_{h\epsilon} \to v^* \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ dual faible de } L^1(\Omega) \qquad (10.59)$$

$$w_{h\epsilon} \to w^* \text{ faiblement dans } L^2(\Gamma) \qquad (10.60)$$

$$y^1_{h\epsilon} \to y^* \textit{ fortement} \text{ dans } L^2(\Omega) \qquad (10.61)$$

$$y^2_{h\epsilon} \to y^{**} \textit{ fortement} \text{ dans } L^2(\Omega)\,. \qquad (10.62)$$

Grâce à (10.38), (10.39) et (10.40), on voit sans difficultés, comme pour le théorème 9.1 que l'on a

$$\left.\begin{array}{l} A\, y^* + v^*\ y^* - f = 0 \\ y^* \in H^1_0(\Omega) \\ A\, y^{**} + v^*\ y^{**} - f = 0 \\ \dfrac{\delta\, y^{**}}{\delta\, \nu_A} = w^* \end{array}\right\} \qquad (10.63)$$

$$y^* = y^{**}$$

autrement dit $m^* \in X$. On démontre comme pour le théorème 9.1 que $p_h\, y^1_{h\epsilon}$ et $p_h\, y^2_{h\epsilon}$ convergent vers $\varpi\, y^*$ *fortement* dans F. Reste à montrer (10.37).

Or on a

$$\begin{aligned} \left(\Lambda^{-1}(\psi - w^*)\,,\, \psi - w^*\right) &\leqslant \underset{h,\ \epsilon \to 0}{lim\ inf} \left(\Lambda^{-1}(\psi - w_{h\epsilon})\,,\, \psi - w_{h\epsilon}\right) \qquad (10.64) \\ &\leqslant \underset{h,\ \epsilon \to 0}{lim\ inf}\, J_{\epsilon h}(m_{h\epsilon})\,. \end{aligned}$$

Il résulte alors de (10.52) que

$$J(m^*) = \left(\Lambda^{-1}(\psi - w^*)\,,\, \psi - w^*\right) = \underset{m \in X}{inf}\, J(m)\,. \qquad (10.65)$$

2.B : Modèle elliptique : Identification des coefficients de l'Opérateur.

11 - Problème vrai et problème régularisé.

11.1 - Hypothèses - Notations.

Les éléments non redéfinis ont la même signification qu'en 5.1. Nous introduisons l'opérateur $A(v)$, où v est le coefficient à identifier, défini par :

$$A(v)\,\varphi = -\sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} \frac{\delta}{\delta\, x_i}\left(a_{ij}(x)\, v(x) \frac{\delta\, \varphi}{\delta\, x_j}\right) + a_0(x)\,\varphi\,. \qquad (11.1)$$

Les fonctions $a_{i,\,j}$ et a_0 vérifient les hypothèses (5.2). Nous supposons que v appartient au sous ensemble $\mathscr{U}_{ad}$ de $\mathscr{U} = L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ défini par

$$\mathscr{U}_{ad} = \left\{ v \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \,\middle|\, 0 < \beta_1 \leqslant v(x) \leqslant \beta_2 \qquad p.\,p.\ \Omega \right\}, \qquad (11.2)$$

$\mathcal{U}$ est muni de la norme produit de $L^\infty(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ et

$\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe fermé de $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

L'état $y \equiv y(v)$ du système est défini par la solution de l'équation

$$\left.\begin{array}{l} A(v) \quad y = f \in L^2(\Omega) \\ \left.\dfrac{\delta y}{\delta v_A(v)}\right|_\Gamma = 0 \text{ (1)}. \end{array}\right\} \qquad (11.3)$$

L'observation est définie par

$$z = \mathcal{C} y + \eta \qquad (11.4)$$

où $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); K)$; K est l'espace de Hilbert des observations. Le symbole η représente l'erreur d'observation, sur laquelle nous ferons alternativement les deux hypothèses A ou B (cf. n° 5.1). Nous introduisons le critère des moindres carrés

$$J(v) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathcal{C} y(v)), z_d - \mathcal{C} y(v)\right) \qquad (11.5)$$

si l'hypothèse A est vérifiée. Sinon, nous faisons l'hypothèse que

$$X = \{ v \mid z_d = \mathcal{C} y(v) \} \text{ est non vide} \qquad (11.6)$$

et nous utilisons alors le critère

$$J^1(v) = \| z_d - \mathcal{C} y(v) \|^2 \qquad (11.7)$$

11.2 - **Régularisation.**

Nous introduisons le critère régularisé

$$J_\lambda(v) = J(v) + \lambda \| v \|^2_{H^1(\Omega)} \qquad (11.8)$$

Nous avons alors

Proposition 11.1 : Il existe un élément v_λ (au moins) vérifiant

$$J_\lambda(v_\lambda) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \qquad (11.9)$$

Démonstration : Soit v_n une suite minimisante, $y_n = y(v_n)$; comme v_n demeure dans un borné de $L^\infty(\Omega)$ et supérieur à $\beta > 0$, il est aisé de voir que $\| y_n \|_{H^1(\Omega)} \leqslant$ Cte. D'après la forme (11.8), on a aussi $\| v_n \|_{H^1(\Omega)} \leqslant$ Cte. Par conséquent, on peut extraire une sous suite, encore notée v_n, y_n telle que $y_n \to y^*$ dans $H^1(\Omega)$ faiblement et $v_n \to v^*$ dans $H^1(\Omega)$ faiblement.

Donc $v^* \in \mathcal{U}_{ad}$. De plus $v_n \to v^*$ *fortement* dans $L^2(\Omega)$. Comme $\dfrac{\delta y_n}{\delta x_j}$, $j = 1 \ldots n$ convergent vers $\dfrac{\delta y^*}{\delta x_j}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, il en résulte que les termes $\dfrac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij} v_n \dfrac{\delta y_n}{\delta x_j}\right)$ convergent vers $\dfrac{\delta}{\delta x_i}\left(a_{ij} v^* \dfrac{\delta y^*}{\delta x_j}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, par exemple. On en déduit alors aisément que $y^* = y(v^*)$. De plus on a

$$J_\lambda(v^*) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} J_\lambda(v_n) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_\lambda(v), \qquad (11.10)$$

d'où il résulte (11.9).

Proposition 11.2 : Toute suite v_λ définie en (11.9) est une suite minimisante pour la fonctionnelle J (v), définie en (11.5).

---

(1) Nous prenons une autre condition aux limites qu'en 2-A, de façon à avoir la plus grande variété des cas.

Démonstration : Identique à la démonstration de la population 5.1 ■

Dans le cas où l'hypothèse B est vérifiée (et non plus l'hypothèse A), ou régularise $J^1(v)$ en

$$J^1_\lambda(v) = \| z_d - \mathscr{C}\, y(v) \|^2_K + \lambda \| v \|^2_{H^1(\Omega)} . \qquad (11.11)$$

On montre alors, comme pour la proposition 11.1, qu'il existe un élément v_λ (au moins) vérifiant

$$J^1_\lambda(v) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J^1_\lambda(v). \qquad (11.12)$$

On a alors

Proposition 11.3 : Toute suite v_λ définie par (11.12) est une suite minimisante pour $J^1(v)$. Les suites v_λ sont bornées dans $H^1(\Omega)$. Soit, encore notée v_λ, une sous suite extraite faiblement convergente vers v^*, alors $v^* \in X$ et vérifie

$$\| v^* \|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v \in X} \| v \| \qquad (11.13)$$

Démonstration : Le fait que v_λ est une suite minimisante pour $J^1(v)$ se démontre comme pour la proposition 5.1. D'autre part si v_0 est un élément quelconque de X, on a

$$\lambda \| v_\lambda \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant J^1_\lambda(v_\lambda) \leqslant \lambda \| v_0 \|^2_{H^1(\Omega)} , \qquad (11.14)$$

donc

$$\| v_\lambda \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \inf_{v_0 \in X} \| v_0 \|_{H^1(\Omega)} ; \qquad (11.15)$$

A (v) étant cœrcif, avec une constante de cœrcivité indépendante de v, $y_\lambda \equiv y(v_\lambda)$ demeure dans un borné de $H^1(\Omega)$. On peut donc extraire du couple (v_λ , y_λ), une sous-suite, notée de façon identique, faiblement convergente dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, vers un couple (v^* , y^*). Comme pour la proposition (11.1), on voit alors que $y^* = y(v^*)$. D'autre part

$$\| z_d - \mathscr{C}\, y(v^*) \|_K \leqslant \liminf_{\lambda \to 0} \| z_d - \mathscr{C}\, y(v_\lambda) \| = 0 , \qquad (11.16)$$

donc $v^* \in X$, et de (11.15) on tire

$$\| v^* \|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v_0 \in X} \| v_0 \| , \qquad (11.17)$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 11.3.

12 - Pénalisation.

12.1 - Fonctionnelle pénalisée.

Nous introduisons la fonctionnelle $J_{\epsilon,\lambda}(y, v)$ définie par

$$J_{\epsilon,\lambda}(y, v) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\, y),\, z_d - \mathscr{C}\, y\right) + \lambda \| v \|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon} | A(v)\, y - f |^2_H , \qquad (12.1)$$

le couple (y, v) appartenant au sous ensemble W de $H^1(\Omega) \times \mathscr{U}$ défini par

$$W = \left\{ (y, v) \,|\, v \in \mathscr{U}_{ad} ,\ y \in H^1(\Omega) , A(v)\, y \in L^2(\Omega) , \frac{\delta y}{\delta \nu_A(v)} = 0 \right\} . \qquad (12.2)$$

Nous avons

Théorème 12.1 : Hypothèses et notations de 11.1. Il existe un couple $\{ y_{\epsilon\lambda} , v_{\epsilon\lambda} \}$ (au moins) vérifiant

$$J_{\epsilon,\lambda}(y_{\epsilon\lambda} , v_{\epsilon\lambda}) = \inf_{(y, v) \in W} J_{\epsilon,\lambda}(y, v) . \qquad (12.3)$$

Démonstration : Soit (y_n, v_n) une suite d'éléments de W, telle que

$$J_{\epsilon,\lambda}(y_n, v_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \inf_{(y,v) \in W} J_{\epsilon,\lambda}(y, v). \tag{12.4}$$

D'après l'expression (12.1), on voit alors que

$$\| v_n \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{Cte} \tag{12.5}$$

$$| A(v_n) y_n |_{L^2(\Omega)} \leqslant \text{Cte}. \tag{12.6}$$

Posons $\xi_n = A(v_n) y_n$. Nous avons

$$\int_\Omega \xi_n y_n \, dx = \int_\Omega A(v_n) y_n \, dx = \sum_{i,j=1} \int_\Omega a_{ij}(x) v_n(x) \frac{\delta y_n}{\delta x_j} \frac{\delta y_n}{\delta x_i} \, dx + \int_\Omega a_0(x) y_n^2 \, dx; \tag{12.7}$$

grâce à la formule de Green, et en utilisant le fait que $\left. \frac{\delta y_n}{\delta \nu_A(v_n)} \right|_\Gamma = 0$. Comme $v_n(x) \geqslant \beta_1 > 0$ et $a_{ij}(x) \geqslant \alpha > 0$, $a_0(x) \geqslant \alpha > 0$, il vient

$$C \| y_n \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \left| \int_\Omega \xi_n y_n \, dx \right| \leqslant \text{Cte} \times | y_n |_H \leqslant \text{Cte} \times \| y_n \|_{H^1(\Omega)}. \tag{12.8}$$

Par conséquent

$$\| y_n \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{Cte}. \tag{12.9}$$

On peut donc grâce à (12.5), (12.6) et (12.9) extraire une sous suite, encore notée (y_n, v_n) telle que

$y_n \to y^*$ dans $H^1(\Omega)$ faiblement, donc dans $L^2(\Omega)$ *fortement* (12.10)

$v_n \to v^*$ dans $H^1(\Omega)$ faiblement, donc dans $L^2(\Omega)$ *fortement* (12.11)

$A(v_n) y_n \to \psi$ dans $L^2(\Omega)$ faiblement. (12.12)

Montrons que

$$\psi = A(v^*) y^*. \tag{12.13}$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nous avons

$$\int_\Omega A(v_n) y_n \varphi \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}(x) v_n(x) \frac{\delta y_n}{\delta x_j} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \, dx + \int_\Omega a_0(x) y_n(x) \varphi(x) \, dx \tag{12.14}$$

Comme $y_n \to y^*$ dans $H^1(\Omega)$ faiblement, $\frac{\delta y_n}{\delta x_j} \to \frac{\delta y^*}{\delta x_j}$ dans $L^2(\Omega)$ faiblement.

Par conséquent, en utilisant (12.11), on peut passer à la limite dans (12.14). Il vient alors

$$\int_\Omega A(v_n) y_n \varphi \, dx \to \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}(x) v^*(x) \frac{\delta y^*}{\delta x_j} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \, dx + \int_\Omega a_0(x) y^* \varphi \, dx \tag{12.15}$$

$$= \int_\Omega A(v^*) y^* \varphi \, dx \quad \text{(au sens des distributions)}.$$

Par conséquent

$$A(v_n) y_n \to A(v^*) y^* \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{12.16}$$

ce qui entraîne (12.13) et

$$A(v^*) y^* \in L^2(\Omega). \tag{12.17}$$

Si nous montrons que

$$\frac{\partial y^*}{\partial \nu_A(v^*)}\Big|_\Gamma = 0, \tag{12.18}$$

alors le couple (y^*, v^*) appartiendra à W. Soit ψ un élément de $H^1(\Omega)$. Nous avons

$$\int_\Omega A(v_n)\, y_n\, \psi\, dx \to \int_\Omega A(v^*)\, y^*\, \psi\, dx, \tag{12.19}$$

d'autre part

$$\int_\Omega A(v_n)\, y_n\, \psi\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}(x)\, v_n\, \frac{\partial y_n}{\partial x_j}\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0(x)\, y_n\, \psi\, dx, \tag{12.20}$$

d'après la formule de Green et le fait que $\dfrac{\partial y_n}{\partial \nu_A(v_n)}\Big|_\Gamma = 0$, donc

$$\int_\Omega A(v_n)\, y_n\, \psi\, dx \to \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}(x)\, v^*\, \frac{\partial y^*}{\partial x_j}\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0(x)\, y^*\, \psi\, dx \tag{12.21}$$

et en raison de (12.19), il vient

$$\int_\Omega A(v^*)\, y^*\, \psi\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}(x)\, v^*\, \frac{\partial y^*}{\partial x_j}\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0(x)\, y^*\, \psi\, dx \tag{12.22}$$

et la formule de Green donne alors

$$\int_\Gamma \frac{\partial y^*}{\partial \nu_A(v^*)}\, \psi|_\Gamma\, d\Gamma = 0, \tag{12.23}$$

ce qui entraîne (12.18) (cf. [37]). Le couple (y^*, v^*) appartient ainsi à W. Par ailleurs

$$J_{\epsilon,\lambda}(y^*, v^*) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} J_{\epsilon,\lambda}(y_n, v_n) = \inf_{(y,v) \in W} J_{\epsilon,\lambda}(y, v), \tag{12.24}$$

ce qui achève la démonstration du théorème (12.1).

12.2 Convergence lorsque $\epsilon \to 0$.

Théorème 12.2 : Hypothèses et notations de 11.1. Les suites $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$, définies en (12.3), vérifient *lorsque* $\epsilon \to 0$ (λ étant fixé) :

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right) + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \underset{\epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J_\lambda(v) \tag{12.25}$$

$(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ demeure dans un *borné* de $H^1(\Omega) \times \mathscr{U}$. (12.26)

Soit, encore notée $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$, une sous-suite extraite, faiblement convergente dans $H^1(\Omega) \times \mathscr{U}$ vers $(y_\lambda^*, v_\lambda^*)$, alors $y_\lambda^* = y(v_\lambda^*)$ et $J_\lambda(v_\lambda^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J_\lambda(v)$. De plus $v_{\epsilon\lambda}$ converge *fortement* vers v_λ^* dans $H^1(\Omega)$. (12.27)

Démonstration :

a) *propriété (12.26)*

Nous avons

$$J_{\epsilon,\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) \leqslant J_\lambda(v^*), \tag{12.28}$$

d'où on déduit que

$$\| v_{\epsilon\lambda} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{Constante} \tag{12.29}$$

et

$$| A(v_{\epsilon\lambda}) y_{\epsilon\lambda} - f |_H \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0, \tag{12.30}$$

donc

$$| A(v_{\epsilon\lambda}) y_{\epsilon\lambda} |_H \leqslant \text{Constante}, \tag{12.31}$$

et comme pour le théorème 12.1, on en déduit

$$\| y_{\epsilon\lambda} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{Cte}. \tag{12.32}$$

b) *propriété (12.27).*

Soit, encore notée $(v_{\epsilon\lambda}, y_{\epsilon\lambda})$, une sous-suite extraite, faiblement convergente dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ vers un élément $v^*, y^* \cdot v^* \in \mathcal{U}_{ad}$. Comme dans le théorème 12.1, on voit que $A(v_{\epsilon\lambda}) y_{\epsilon\lambda} \underset{\epsilon \to 0}{\to} A(v^*) y^*$ et que $\left.\frac{\partial y^*}{\partial \nu_A(v^*)}\right|_\Gamma = 0$. Mais, grâce à (12.30), on a alors

$$\left.\begin{aligned} &A(v^*) y^* = f \\ &\left.\frac{\partial y^*}{\partial \nu_A(v^*)}\right|_\Gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{12.33}$$

soit $y^* = y(v^*)$. D'autre part

$$\left.\begin{aligned} &\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y^*), z_d - \mathscr{C} y^*\right)_K + \lambda \| v^* \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \underset{\epsilon \to 0}{lim\ inf} \quad \left\{ \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda})\right), \right. \\ &\left. z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right) + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \Big\} \leqslant \underset{v \in \mathcal{U}_{ad}}{inf} J_\lambda(v) \quad \text{(d'après (12.28))}, \end{aligned}\right. \tag{12.34}$$

donc

$$J_\lambda(v^*) = \underset{v \in \mathcal{U}_{ad}}{inf} J_\lambda(v) \tag{12.35}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right) + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \underset{\epsilon \to 0}{\to} \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y^*), z_d - \mathscr{C} y^*\right) \\ &+ \lambda \| v^* \|^2_{H^1(\Omega)}; \end{aligned}\right. \tag{12.36}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \| v_{\epsilon\lambda} - v^* \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \lambda \| v_{\epsilon\lambda} - v^* \|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda} - z_d + \mathscr{C} y^*), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right. \\ &\left. - z_d + \mathscr{C} y^*\right) \\ &= \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|^2 + \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right) + \lambda \| v^* \|^2 + \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y^*), z_d\right. \\ &\left. - \mathscr{C} y^*\right) - 2\lambda \left((v_{\epsilon\lambda}, v^*)\right) - 2 \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y^*\right) \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0. \end{aligned}\right. \tag{12.37}$$

c) *propriété (12.25).*

Elle résulte du fait que la suite

$$L_\epsilon = (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}) + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \qquad (12.38)$$

est bornée, lorsque $\epsilon \to 0$, et qu'elle ne peut avoir d'autre point d'accumulation que $\inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J_\lambda(v)$ (cf. partie c) du théorème 6.2).

Corollaire 12.1. Si, outre les hypothèses du théorème 12.2, on suppose que $A(v)$ est *autoadjoint*, alors dans la partie (12.27) du théorème 12.2, on a

$$y_{\epsilon\lambda} \underset{\epsilon \to 0}{\to} y_\lambda^* \text{ fortement dans } H^1(\Omega). \qquad (12.39)$$

Démonstration : Nous avons

$$\alpha \| y_{\epsilon\lambda} - y_\lambda^* \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) v_{\epsilon\lambda} \left(\frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial y_\lambda^*}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_\lambda^*}{\partial x_i} \right) dx$$

$$+ \int_\Omega a_0(x) (y_{\epsilon\lambda} - y_\lambda^*)(y_{\epsilon\lambda} - y_\lambda^*)\, dx \qquad (12.40)$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_{\epsilon\lambda} \frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial x_j} \frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial x_i} + \int_\Omega a_0(x) (y_{\epsilon\lambda})^2 dx - 2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_{\epsilon\lambda}$$

$$\frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial x_j} \frac{\partial y_\lambda^*}{\partial x_i} dx - 2 \int_\Omega a_0(x)\ y_{\epsilon\lambda}\ y_\lambda^*\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{\epsilon\lambda} \frac{\partial y_\lambda^*}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial y_\lambda^*}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0(x) (y_\lambda^*)^2 dx$$

ce qui tend vers 0, grâce à (12.30) et au fait que $v_{\epsilon\lambda}$, convergeant faiblement dans $\mathscr{U}$, converge dans $L^\infty(\Omega)$ dual faible de $L^1(\Omega)$.

12.3 - Convergence lorsque $\epsilon, \lambda \to 0$ simultanément.

Théorème 12.3 :

Hypothèses et Notations de 11.1. Les suites $y_{\epsilon\lambda}$, $v_{\epsilon\lambda}$ définies en (12.3), vérifient, lorsque $\epsilon, \lambda \to 0$ *simultanément :*

$$(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}) \to \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)\ ; \qquad (12.41)$$

$J(v)$ étant définie en (11.5). De plus

$$\lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \to 0 \qquad (12.42)$$

$$\frac{1}{\epsilon} | A(v_{\epsilon\lambda}) y_{\epsilon\lambda} - f |^2_H \to 0 \qquad (12.43)$$

$y_{\epsilon\lambda}$ demeure dans un borné de $H^1(\Omega)$. (12.44)

Démonstration :

On opère comme pour le théorème 6.3. On applique le lemme de TARTAR avec $\mathscr{A}(u) = A(u)$, $z = z_d$, $K_0 = K$, $V_1 = V$, $K_2 = L_2(\Omega)$. Le raisonnement est identique.

Théorème 12.4 : Hypothèses et Notations de 11.1. Les suites $y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}$ définies par

$$J^1_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) = \inf_{(y,v)\in W} J^1_{\epsilon\lambda}(y, v)^{(1)} \tag{12.48}$$

vérifient, *lorsque* $\epsilon, \lambda \to 0$ *simultanément :*

$$\lim_{\epsilon,\lambda\to 0} \| z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda} \| = 0 \tag{12.49}$$

$(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ demeure dans un *borné* de $H^1(\Omega) \times \mathscr{U}$ (12.50)

Soit, encore notée $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ une sous-suite extraite, faiblement convergente dans $H^1(\Omega) \times \mathscr{U}$ vers (y^*, v^*), alors $y^* = y(v^*)$ et $v^* \in X, \| v^* \| = \inf_{v\in X} \| v \|$. De plus $v_{\epsilon\lambda}$ converge *fortement* vers v^* dans $H^1(\Omega)$. (12.51)

Démonstration : Si $v_0 \in X$, on a

$$\| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \| v_0 \|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{12.52}$$

et $A(v_{\epsilon\lambda}) y_{\epsilon\lambda} \to f$ fortement dans H, donc comme pour le théorème 12.1, on a

$$\| y_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{Constante}. \tag{12.53}$$

Soit, encore notée $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ une sous-suite extraite, faiblement convergente dans $H^1(\Omega) \times \mathscr{U}$ vers (y^*, v^*). Alors, comme pour le théorème 12.2, on voit que $y^* = y(v^*)$. D'autre part

$$\| z_d - \mathscr{C} y^* \| \leqslant \liminf_{\epsilon,\lambda\to 0} \| z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda} \| = 0. \tag{12.53}$$

Donc $v^* \in X$ et de (12.52), on déduit

$$\| v^* \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \| v_0 \|_{H^1(\Omega)}, \forall v_0 \in X, \tag{12.54}$$

donc $\| v^* \|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v_0\in X} \| v_0 \|_{H^1(\Omega)}$ et

$\| v_{\epsilon\lambda} \|^2_{H^1(\Omega)} \to \| v^* \|^2_{H^1(\Omega)}$, ce qui, avec la convergence faible complète la démonstration du théorème 12.4.

2. C : Modèle parabolique bilinéaire.

13. Problème vrai. Problème pénalisé.

13.1. Hypothèses - Notations.

Le modèle à identifier est le suivant :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\, y + vy = f \quad \text{p.p. dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ &y|_{\Sigma} = 0 \qquad\qquad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ &y(0) = y_0 \qquad\qquad y_0 \in L^2(\Omega). \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

L'opérateur $A(t)$ est défini par

$$A(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a_0(x,t) \tag{13.2}$$

---

(1) $J^1_{\epsilon,\lambda}(y, v) = \| z_d - \mathscr{C} y \|^2 + \lambda \| v \|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon} | A(v) y - f |^2_H$.

où

$$\left.\begin{array}{l} a_{i,j}\ a_0 \in L^\infty(Q) \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \alpha\,(\xi_1^2 + \ldots - \xi_n^2) \qquad \text{p.p. } Q;\ \alpha > 0. \\ a_0(x,t) \geqslant \alpha \qquad \text{p.p. } Q; \end{array}\right\} \quad (13.3)$$

v élément à *identifier* appartient à $L^\infty(Q)$.

L'observation est définie par

$$\overline{z} = \mathscr{C}\,y + \eta\,, \qquad (13.4)$$

où $\mathscr{C} \in \mathscr{L}(W(0,T)\,;K)$ avec

$$W(0,T) = \{\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \mid \varphi' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}; \qquad (13.5)$$

K désigne l'espace de Hilbert des observations; η représente l'erreur d'observation. Nous ferons sur elles les mêmes hypothèses A ou B qu'au n° 5.1. Le critère des moindres carrés est donc, soit :

$$J(v) = (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}\,y(v))\,,\, z_d - \mathscr{C}\,y(v))\,, \qquad (13.6)$$

soit

$$J^1(v) = \| z_d - \mathscr{C}\,y(v) \|^2 \qquad (13.7)$$

et dans le cas (13.7) (hypothèse B), on suppose que

$$X = \{\, v \mid z_d = \mathscr{C}\,y(v) \,\} \text{ est non vide.} \qquad (13.8)$$

13.2. **Le problème approché.**

Soit Y l'ensemble défini par

$$Y = \{\, y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \mid \frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\ y \in L^2(Q)\}. \qquad (13.9)$$

Introduisons la fonctionnelle, qui dépend de deux paramètres ϵ, λ, définie par

$$J_{\epsilon,\lambda}(y,v) = (\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}y),\, z_d - \mathscr{C}y) + \lambda \| v \|_{L^\infty(\Omega)} \qquad (13.10)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} \left| \frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\ y + vy - f \right|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon} |\, y(0) - y_0 |^2_H.$$

Nous avons

Théorème 13.1 : Hypothèses et notations de 13.1. Il existe un couple $(y_{\epsilon\lambda}\,,\, v_{\epsilon\lambda})$ (au moins) vérifiant

$$J_{\epsilon,\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) = \inf_{y \in Y;\, v \in L^\infty(Q)} J_{\epsilon,\lambda}(y,v). \qquad (13.11)$$

Démonstration : Soit y_n, v_n une suite minimisante. On a $\| v_n \|_{L^\infty(Q)} \leqslant$ Cte. D'autre part, si on pose

$$\xi_n(t) = \frac{\partial y_n}{\partial t} + A(t)\,y_n + v_n y_n, \qquad (13.12)$$

on a

$$|\,\xi_n|_{L^2(Q)} \leqslant \text{Cte}. \qquad (13.13)$$

D'après (13.12), on a

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt} |\,y_n(t)|^2 + < A(t)\,y_n, y_n > + \int_\Omega v_n y_n^2\,dx = \int_\Omega \xi_n(t,x)\,y_n(x,t)\,dx, \qquad (13.14)$$

d'où en intégrant entre 0 et t, et grâce au fait que v_n est borné dans $L^\infty(Q)$:

$$|y_n(t)|^2 - |y_n(0)|^2 + \alpha \int_0^t \| y_n(\sigma) \|^2 \, d\sigma \leqslant C_1 \int_0^t |y_n(\sigma)|^2 \, d\sigma + C_2. \qquad (13.15)$$

Comme $|y_n(0)|^2$ est borné, il résulte du lemme de Gronwall que y_n est borné dans $L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$. De plus il résulte de (16.15) que y_n est borné dans $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$. De (13.12), il suit alors que $\dfrac{\partial y_n}{\partial t}$ est borné dans $L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$. D'après un lemme de compacité de LIONS [34], on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n, telle que

$$y_n \to y \quad \text{dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \quad \textit{faiblement} \qquad (13.16)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} \to \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{dans } L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right) \quad \textit{faiblement} \qquad (13.17)$$

$$y_n \to y \quad \text{dans } L^2(Q) \qquad \textit{fortement}. \qquad (13.18)$$

On peut toujours supposer (quitte à extraire une nouvelle sous-suite) que

$$v_n \to v \quad \text{dans } L^\infty(Q) \text{ dual faible de } L^1(Q) \qquad (13.19)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} + A(t) y_n + v_n y_n \to \xi \quad \text{dans } L^2(Q) \text{ faiblement;} \qquad (13.20)$$

De (13.16) - - (13.19) il résulte, comme pour le théorème 6.1, que

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} + A(t) y_n + v_n y_n \to \frac{\partial y}{\partial t} + A(t) y + vy \quad \text{dans } \mathscr{D}'(Q), \qquad (13.21)$$

d'où

$$\xi = \frac{\partial y}{\partial t} + A(t) y + vy. \qquad (13.22)$$

Comme $y_n(0) \to y(0)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, on a

$$J_{\epsilon\lambda}(y, v) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} J_{\epsilon,\lambda}(y_n, v_n) = \inf_{y \in Y,\, v \in L^\infty(\Omega)} J_{\epsilon,\lambda}(y, v), \qquad (13.23)$$

ce qui démontre le théorème.

13.3 **Convergence lorsque $\epsilon, \lambda \to 0$.**

Posons

$$J_\lambda(v) = J(v) + \lambda \| v \|_{L^\infty(Q)} \qquad (13.24)$$

On sait (cf. [35]) qu'il existe un élément v_λ de $L^\infty(Q)$, au moins, vérifiant

$$J_\lambda(v_\lambda) = \inf_{v \in L^\infty(Q)} J_\lambda(v). \qquad (13.25)$$

Nous avons

Lemme 13.1 : Pour tout v_λ vérifiant (13.25), on a

$$J_\lambda(v_\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\to} \inf_{v \in L^\infty(Q)} J(v) \qquad (13.26)$$

$$J(v_\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\to} \inf_{v \in L^\infty(Q)} J(v). \qquad (13.27)$$

Démonstration : identique à la proposition 5.1.

Théorème 13.2 : Hypothèses et notations de 13.1. Les suites $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ définies par l'équation (13.11) vérifient, *lorsque* $\epsilon \to 0$:

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}\right) + \lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(Q)} \underset{\epsilon \to 0}{\to} \inf_{v \in L^\infty(Q)} J_\lambda(v) \qquad (13.28)$$

$(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ demeure dans un borné de $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \times L^\infty(Q)$ soit, encore notée $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$, une sous-suite extraite telle que $y_{\epsilon\lambda} \to y_\lambda^*$ faiblement dans $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ et $v_{\epsilon\lambda} \to v_\lambda^*$ dans $L^\infty(Q)$ (dual faible $L^1(Q)$), alors $y_\lambda^* = y(v_\lambda^*)$ et $J_\lambda(v^*) = \inf_{v \in L^\infty(Q)} J_\lambda(v)$. De plus $y_{\epsilon\lambda}$ converge *fortement* vers y_λ^* dans $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$. (13.29) (13.30)

Démonstration :

a) *démonstration de (13.29).*

On a

$$J_{\epsilon,\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) \leqslant J_\lambda(v_\lambda), \tag{13.31}$$

donc

$$\| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(Q)} \leqslant \text{Cte} \tag{13.32}$$

$$\left| \frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial t} + A(t) y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} \right|_{L^2(Q)} \leqslant \text{Cte} \tag{13.33}$$

$$|y_{\epsilon\lambda}(0)|_H \leqslant \text{Cte} \tag{13.34}$$

ce qui entraîne, comme pour le théorème 13.1, la propriété (13.29).

b) *démonstration de (13.30).*

Soit, encore notée $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$, une sous-suite extraite telle que $y_{\epsilon\lambda} \to y_\lambda^*$ faiblement dans $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ et $v_{\epsilon\lambda} \to v_\lambda^*$ dans $L^\infty(Q)$ dual faible de $L^1(Q)$. Comme pour le théorème 13.1, on voit alors que

$$\frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial t} + A(t) y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} \underset{\epsilon \to 0}{\to} \frac{\partial y_\lambda^*}{\partial t} + A(t) y_\lambda^* + v_\lambda^* y_\lambda^* \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{13.34}$$

$$y_{\epsilon\lambda}(0) \underset{\epsilon \to 0}{\to} y_\lambda^*(0) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{13.35}$$

Comme $\frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial t} + A(t) y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f \to 0$, ainsi que $y_{\epsilon\lambda}(0) - y_0$, il en résulte que

$$y_\lambda^* = y(v_\lambda^*) \tag{13.36}$$

et

$$\liminf_{\epsilon \to 0} J_{\epsilon\lambda}(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda}) \geqslant J_\lambda(v^*), \tag{13.37}$$

ce qui, avec (13.31), entraîne que $J_\lambda(v^*) = \inf_{v \in L^\infty(Q)} J_\lambda(v)$. Montrons la convergence forte de $y_{\epsilon\lambda}$ vers y_λ^* dans $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$. Tout d'abord

$$\int_Q v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda}^2 \, dx\, dt \underset{\epsilon \to 0}{\to} \int_Q v_\lambda^* y_\lambda^{*2} dx\, dt \tag{13.38}$$

(cf. démonstration du théorème 6.2)

et $|y_{\epsilon\lambda}(0)|^2 \to |y_\lambda^*(0)|^2$ (puisque $y_{\epsilon\lambda}(0) \underset{\epsilon \to 0}{\to} y_\lambda^*(0)$ fortement dans H). Or

$$|y_{\epsilon\lambda}(T)|^2 + 2 \int_0^T < A(t) y_{\epsilon\lambda}, y_{\epsilon\lambda} > dt = 2 \int_0^T \left(\frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial t} + A(t) y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f, y_{\epsilon\lambda} \right) dt$$
$$+ |y_{\epsilon\lambda}(0)|^2 - 2 \int_Q v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda}^2 \, dx\, dt + 2 \int_0^T (f, y_{\epsilon\lambda}) \, dt, \tag{13.39}$$

d'où il résulte que le premier membre de (13.39) converge, lorsque $\epsilon \to 0$, vers

$$2 \int_0^T \left(\frac{\partial y_\lambda^*}{\partial t} + A(t) y_\lambda^* + v_\lambda^* y_\lambda^* - f, y_\lambda^* \right) dt + |y_\lambda^*(0)|^2 - 2 \int_Q v_\lambda^* y_\lambda^{*2} \, dx \, dt$$

$$+ 2 \int_0^T (f, y_\lambda^*) \, dt = |y_\lambda^*(T)|^2 + 2 \int_0^T < A(t) y_\lambda^*, y_\lambda^* > dt$$

ce qui implique, avec la convergence faible que $y_{\epsilon\lambda} \underset{\epsilon \to 0}{\to} y_\lambda^*$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ fortement.

c) *démonstration de (13.28).*

Analogue à la partie c) du théorème 6.2.

Théorème 13.3 : Hypothèses et notations de 13.1. Les suites $(y_{\epsilon\lambda}, v_{\epsilon\lambda})$ définies par l'équation (13.11), vérifient lorsque $\epsilon, \lambda \to 0$ *simultanément* :

$$(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}), z_d - \mathscr{C} y_{\epsilon\lambda}) \to \inf_{v \in L^\infty(Q)} J(v). \qquad (13.40)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \left| \frac{\partial y_{\epsilon\lambda}}{\partial t} + A(t) y_{\epsilon\lambda} + v_{\epsilon\lambda} y_{\epsilon\lambda} - f \right|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon} |y_{\epsilon\lambda}(0) - y_0|^2_H \to 0 \qquad (13.41)$$

$$\lambda \| v_{\epsilon\lambda} \|_{L^\infty(Q)} \to 0 \qquad (13.42)$$

$y_{\epsilon\lambda}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. (13.43)

Démonstration : analogue à la démonstration du théorème 6.3.

Remarque 13.1 : Si nous considérons maintenant le critère $J^1(v)$ (et l'hypothèse (13.8)) et le critère approché

$$J^1_{\epsilon,\lambda}(y, v) = \| z_d - \mathscr{C} y \|^2_K + \frac{1}{\epsilon} \left| \frac{\partial y}{\partial t} + A(t) y + vy - f \right|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon} |y(0) - y_0|^2_H \qquad (13.44)$$

$$+ \lambda \| v \|_{L^\infty(Q)},$$

nous pouvons énoncer un théorème analogue au théorème 6.4. Nous le donnons sans démonstration.

Théorème 13.4 : Hypothèses et notations de 13.1. Les couples $(\bar{y}_{\epsilon\lambda}, \bar{v}_{\epsilon\lambda})$ définis par

$$J^1_{\epsilon\lambda}(\bar{y}_{\epsilon\lambda}, \bar{v}_{\epsilon\lambda}) = \inf_{y \in Y;\, v \in L^\infty(Q)} J^1_{\epsilon\lambda}(y, v) \qquad (13.45)$$

vérifient, *lorsque* $\epsilon, \lambda \to 0$ *simultanément* :

$$\| z_d - \mathscr{C} \bar{y}_{\epsilon\lambda} \| \to 0 \qquad (13.46)$$

$(\bar{y}_{\epsilon\lambda}, \bar{v}_{\epsilon\lambda})$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(Q)$. (13.47)

Soit, encore notée $(\bar{y}_{\epsilon\lambda}, \bar{v}_{\epsilon\lambda})$, une sous-suite extraite telle que $\bar{y}_{\epsilon\lambda}$ converge faiblement dans $L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$ vers y^*, et $\bar{v}_{\epsilon\lambda}$ converge vers v_λ dans $L^\infty(Q)$ (dual faible de $L^1(Q)$), alors $y^* = y(v^*)$ et $\| v^* \|_{L^\infty(Q)} \inf_{v \in X} \| v \|_{L^\infty(Q)}$. De plus $\bar{y}_{\epsilon\lambda} \to y^*$ *fortement* dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. (13.48)

14. Modèle discrétisé.

14.1 Hypothèses - Notations.

Pour la discrétisation en espace, les notations sont les mêmes qu'en 7.2. Nous considérons également un découpage de l'intervalle (0, T), soit $(0, k, 2\,k \ldots mk = T)$.

Soit $W_r(t)$ la fonction caractéristique de $[rk, (r+1)\,k[$. Désignons par ξ le couple (h, k). Considérons les éléments y_ξ de la forme

$$y_\xi \equiv y_\xi(t) = \sum_{r=0}^{m-1} y_\xi(rk)\, W_r(t), \tag{14.1}$$

où $y_\xi(rk)$ appartient à V_h. Nous posons

$$\nabla_k \varphi(t) = \frac{1}{t}\left[\varphi(t+k) - \varphi(t)\right]. \tag{14.2}$$

Nous supposons que

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}\left(L^2(0, T; H); K\right), \tag{14.3}$$

et que

$$v \in \text{convexe fermé } \textit{borné} \text{ de } L^\infty(Q), \text{ soit } \mathscr{U}_{ad}. \tag{14.4}$$

Les analogues discrétisés des v seront les éléments v_ξ de $L^\infty(Q)$

$$v_\xi \equiv v_\xi(t) = \sum_{r=0}^{m-1} v_\xi(rk)\, W_r(t)\,;\ v_\xi(rk) \in H_h. \tag{14.5}$$

Soit $A_h(t) \in \mathscr{L}(V_h; V_h)$, la famille d'opérateurs définis par

$$\left(A_h(t)\, y_h\right)(P) = \frac{1}{h_1 \cdots h_n} \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\,(\delta_j y_h)\,(\delta_i W_{hP}) + a_0(x,t)\, y_h\, W_{hP}\right] dx, \tag{14.6}$$

Pour $P \in S_h^0(\Omega)$, et soit $A_\xi(t) \in \mathscr{L}(V_h; V_h)$ défini par

$$A_\xi(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \left[\int_{rk}^{(r+1)k} A_h(\tau)\, d\tau\right] W_r(t). \tag{14.7}$$

Nous associons enfin à tout y_ξ, un élément $\bar{y}_\xi$ défini par

$$\bar{y}_\xi(t) = y_\xi(t) + \theta k\, \nabla_k y_\xi(t),\ \theta \geqslant \tfrac{1}{2}; \tag{14.8}$$

et soit $r_\xi \in \mathscr{L}\left(L^2(Q); L^2(Q)\right)$ défini par

$$r_\xi\, \varphi = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_{rk}^{(r+1)k} r_h\, \varphi(t)\, dt\right) W_r(t). \tag{14.9}$$

Nous introduisons alors la fonctionnelle discrétisée

$$\mathfrak{J}_{\epsilon,\xi}(y_\xi, v_\xi) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C} y_\xi),\, z_d - \mathscr{C} y_\xi\right) + \frac{1}{\epsilon}\left|\nabla_k y_\xi + A_\xi \bar{y}_\xi + r_\xi(v_\xi \bar{y}_\xi)\right. \tag{14.10}$$

$$\left. - r_\xi f\right|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}\left|y_\xi(0) - r_h y_0\right|^2_H,$$

avec y_ξ de la forme (17.1), v_ξ de la forme (17.5) $\in \mathscr{U}_{ad}$.

Proposition 14.1 : Il existe un couple $(y_{\xi\epsilon}, v_{\xi\epsilon})$ (au moins) vérifiant

$$\check{J}_{\epsilon,\xi}(y_{\xi\epsilon}, v_{\xi\epsilon}) = \inf_{y_\xi,\, v_\xi} \check{J}_{\epsilon,\xi}(y_\xi, v_\xi). \tag{14.11}$$

Démonstration : Soit $y_{\xi n}, v_{\xi n}$ une suite minimisante. Par construction les variables réelles $v_{\xi n}(rh\,;\,\mathrm{M})$, $\mathrm{M} \in \Omega_h^0$ sont bornées. Montrons qu'il en est de même des variables $y_{\xi n}(rk\,;\,\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathrm{S}_h^0(\Omega)$. En effet, posons

$$\eta_n = \nabla_k y_{\xi n} + \mathrm{A}_\xi(t)\,\bar{y}_{\xi n} + r_\xi(v_{\xi n}\bar{y}_{\xi n})\,; \tag{14.12}$$

η_n demeure dans un borné de $\mathrm{L}^2(\mathrm{Q})$. Or

$$(\eta_n, \bar{y}_{\xi n})_{\mathrm{H}} = (\nabla_k y_{\xi n}, y_{\xi n})_{\mathrm{H}} + \theta\, k\,|\nabla_k y_{\xi n}|_{\mathrm{H}}^2 + (\mathrm{A}_\xi(t)\,\bar{y}_{\xi n}, \bar{y}_{\xi n})_{\mathrm{H}} \tag{14.13}$$
$$+ (r_\xi(v_{\xi n}\bar{y}_{\xi n}), \bar{y}_{\xi n})_{\mathrm{H}}.$$

Posons

$$\mathrm{X}_n(t) = (r_\xi(v_{\xi n}\bar{y}_{\xi n}), \bar{y}_{\xi n})_{\mathrm{H}} \tag{14.14}$$

$$\mathrm{X}_n(t) = \sum_{r=0}^{m-2} \mathrm{W}_r(t) \sum_{\mathrm{M} \in \mathrm{S}_h^0(\Omega)} \Big[\theta\, y_{\xi n}((r+1)\,k\,;\,\mathrm{M})$$

$$+ (1-\theta)\, y_{\xi n}(rk\,;\,\mathrm{M})\Big]^2 \int_{\sigma_{h(\mathrm{M},0)}} v_{\xi n}(rk)\,dx \;+ \mathrm{W}_{m-1}(t) \sum_{\mathrm{M} \in \mathrm{S}_h^0(\Omega)} \tag{14.15}$$

$$\Big[(1-\theta)\, y_{\xi n}((m-1)\,k\,;\,\mathrm{M})\Big]^2 \int_{\sigma_{h\,(\mathrm{M},\,0)}} v_{\xi n}((m-1)\,k)\,dx.$$

Il existe alors deux constantes γ_1 et γ_2 telles que

$$\gamma_1 |\bar{y}_{\xi n}|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant \mathrm{X}_n(t) \leqslant \gamma_2 |\bar{y}_{\xi n}|_{\mathrm{H}}^2. \tag{14.16}$$

En utilisant l'égalité (cf. [43]) suivante :

$$\nabla_k |\varphi(t)|^2 = 2\,(\varphi(t), \nabla_k \varphi(t)) + k\,|\nabla_k \varphi(t)|^2, \tag{14.17}$$

l'égalité (17.12) s'écrit

$$\nabla_k |y_{\xi n}|^2 + (2\theta - 1)\, k\,|\nabla_k y_{\xi n}|^2 + 2\,(\mathrm{A}_\xi(t)\,\bar{y}_{\xi n}, \bar{y}_{\xi n}) = 2\,(\eta_n, \bar{y}_{\xi n}) \tag{14.18}$$
$$- 2\,(r_\xi(v_{\xi n}\bar{y}_{\xi n}), \bar{y}_{\xi n})_{\mathrm{H}}$$

et, en raison de (14.16), on peut trouver deux constantes C_1 et C_2 positives, telles que

$$\nabla_k |y_{\xi n}|^2 + 2\,\alpha\,\|p_h \bar{y}_{\xi n}\|_{\mathrm{F}}^2 \leqslant \mathrm{C}_1 |\eta_n|_{\mathrm{H}}^2 + \mathrm{C}_2 |\bar{y}_{\xi n}|_{\mathrm{H}}^2. \tag{14.19}$$

Comme η_n est borné dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{Q})$, et que $y_{\xi n}(0)$ est borné dans H, l'inégalité (14.19) suffit pour fournir les inégalités suivantes (pour les détails, nous renvoyons à RAVIART [49]).

$$|y_{\xi n}(t)|_{\mathrm{H}} \leqslant \text{Constante} \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}[\tag{14.20}$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} \|p_h \bar{y}_{\xi n}(t)\|_{\mathrm{F}}^2\, dt \leqslant \text{Constante}. \tag{14.21}$$

De (17.20), on déduit que les variables $y_{\xi n}(rk\,;\,\mathrm{P})$ sont bornées $\forall\, \mathrm{P}$, $\forall\, r$. Ceci, joint à la continuité de la fonction $\check{J}_{\epsilon,\xi}(y_\xi, v_\xi)$ suffit à assurer la proposition.

14.2 Passage à la limite.

Nous faisons tendre ϵ et ξ simultanément vers 0. Nous avons

Théorème 14.1 : Hypothèses-Notations de 14.1. Les suites $y_{\xi\epsilon}$, $v_{\xi\epsilon}$ définies en (14.11)

vérifient, *lorsque* $\epsilon, \xi \to 0$ *simultanément.*

$$\left(\Lambda^{-1}\,(z_d - \mathscr{C}\,y_{\xi\epsilon})\,,\, z_d - \mathscr{C}\,y_{\xi\epsilon}\right) \to \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J\,(v). \tag{14.22}$$

$$(p_h\,\bar{y}_{\xi\epsilon}\,,\, v_{\xi\epsilon}) \text{ demeure dans un borné de } L^2\,(0, T; F) \times L^\infty\,(Q). \tag{14.23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Soit, encore notée } (p_h\,\bar{y}_{\xi\epsilon}\,,\, v_{\xi\epsilon}) \text{ une sous-suite extraite, telle que } p_h\,\bar{y}_{\xi\epsilon} \\ \text{converge faiblement dans } L^2\,(0, T; F) \text{ vers } \varphi^* \text{ et } v_{\xi\epsilon} \text{ converge vers } v^* \text{ dans} \\ L^\infty\,(Q) \text{ (dual faible de } L^1\,(Q)), \text{ alors } \varphi^* = \varpi\,y\,(v_{\xi\epsilon}) \text{ (pour tout } t) \text{ et} \\ J\,(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J\,(v). \text{ De plus } p_h\,y_{\xi\epsilon} \text{ converge } \textit{fortement} \text{ vers } \varphi^* \text{ dans} \\ L^2\,(0, T; F) \text{ et } y_{\xi\epsilon}\,(t) \to y\,(v_{\xi\epsilon}; t) \textit{ fortement} \text{ dans H, } \forall\, t \in [0, T].\end{array}\right\} \tag{14.24}$$

Démonstration :

a) *propriété (14.23).*

Soit v_0 un élément réalisant $\inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J\,(v)$. Définissons $s_\xi\,v_0$ par

$$s_\xi\,v_0 = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{W_r\,(t)}{k} \int_{rk}^{(r+1)\,k} s_h\,v_0\,(t)\,dt\,. \tag{14.25}$$

On voit facilement que $s_\xi\,v_0 \to v_0$ *fortement* dans $L^2\,(Q)$. On considère alors l'équation

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_k\,y_\xi + A_\xi\,(t)\,\bar{y}_\xi + r_\xi\,(s_\xi\,v_0\,y_\xi) = r_\xi\,f \\ y_\xi\,(0) = r_h\,y_0\,.\end{array}\right\} \tag{14.26}$$

Soit y_ξ^* la solution de (14.26). On tire de (14.26) l'égalité de l'énergie suivante

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_k\,|\,y_\xi^*\,|^2 + (2\,\theta\text{-}1)\,|\,\nabla_k\,y_\xi^*\,|^2 + 2\,\left(A_\xi\,(t)\,\bar{y}_\xi^*\,,\,\bar{y}_\xi^*\right) + 2\,\left(r_\xi\,(A_\xi\,v_0\,\bar{y}_\xi)\,,\,\bar{y}_\xi\right) \\ \qquad = 2\,(r_\xi\,f, \bar{y}_\xi)\,.\end{array}\right\} \tag{14.27}$$

Comme pour la proposition 14.1, il en résulte que

$$|\,y_\xi^*\,(t)\,|_H \leqslant \text{Cte} \tag{14.28}$$

$$\int_0^T \|\,p_h\,\bar{y}_\xi^*\,(t)\,\|_F^2\,dt \leqslant \text{Cte}\,. \tag{14.29}$$

Soit ψ une fonction scalaire une fois continuement différentiable dans $[\,0, T\,]$ avec $\psi\,(T) = 0$ et, soit

$$\psi_k\,(t) = \sum_{r=-1}^{m-2} \psi\,\left((r+1)\,k\right)\,W_r\,(t)\,; \tag{14.30}$$

Soit $z \in \mathscr{V} = \mathscr{D}\,(\Omega)$. De (14.26) on déduit

$$\int_0^T (\nabla_k\,y_\xi^*\,,\, r_h\,z)\,\psi_k\,(t)\,dt + \int_0^T \left(A_\xi\,(t)\,\bar{y}_\xi^*\,,\, r_h\,z\right)\,\psi_k\,(t)\,dt \tag{14.31}$$

$$+ \int_0^T \left(r_\xi\,(s_\xi\,v_0\,\bar{y}_\xi^*)\,,\, r_h\,z\right)\,\psi_k\,(t)\,dt = \int_0^T (r_\xi\,f\,,\, r_h\,z)\,\psi_k\,(t)\,dt\,,$$

soit

$$\left.\begin{array}{l}-\int_0^T (\bar{y}_\xi\,,\, \nabla_k\,\psi_k\,r_h\,z)\,dt + \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,(x, t)\,(\delta_j\,\bar{y}_\xi^*)\,(\delta_i\,r_h\,z)\right. \\ \left. + a_0\,(x, t)\,\bar{y}_\xi^*\,r_h\,z\right]\,\psi_k\,(t)\,dx\,dt + \int_0^T (s_\xi\,v_0\,\bar{y}_\xi^*\,,\, r_h\,z)\,\psi_k\,(t)\,dt \\ = \int_0^T (\,f, r_h\,z)\,\psi_k\,(t)\,dt + (\,y_0\,,\, r_h\,z)\,\psi\,(0)\,,\end{array}\right\} \tag{14.32}$$

en posant

$$\nabla_k \varphi = \frac{1}{k}\left[\varphi(t) - \varphi(t-k) \right] \qquad (14.33)$$

Grâce à (14.28) et (14.29), on peut extraire une sous suite, encore notée $y_\xi^*(t)$ telle que $p_h \bar{y}_\xi^* \to \varpi y^*$ dans $L^2(0, T; F)$ faiblement et $y_\xi^* \to y^*$ dans $L^2(0, T; H)$ faiblement. On peut alors passer à la limite dans (14.32). On en déduit aisément que $y^* = y(v_0)$. Nous avons, en fait, besoin que $y_\xi^* \to y(v_0)$ *fortement* dans $L^2(0, T; H)$.

Nous utilisons pour cela un résultat de compacité de LIONS [34]. Pour l'adaptation discrète, nous renvoyons à RAVIART [49]. D'après la thèse de ce dernier, on peut déduire du fait que $\nabla_k y_\xi + A_\xi(t)\bar{y}_\xi + r_\xi(s_\xi v_0\ \bar{y}_\xi)$ est borné dans $L^2(Q)$ et de la $L^\infty(0, T; H)$ stabilité (propriété (17.28)) qu'il existe une sous suite y_ξ^*, fortement convergente vers $y^* = y(v_0)$, dans $L^2(0, T; H)$. Par conséquent on a

$$\check{J}_{\epsilon,\xi}(y_\xi^*, s_\xi v_0) \to J(v_0) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \qquad (14.34)$$

d'où on déduit

$$\liminf_{\epsilon, \xi \to 0} \check{J}_{\epsilon,\xi}(y_{\xi\epsilon}, v_{\xi\epsilon}) \leqslant \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \qquad (14.35)$$

Par conséquent

$$\nabla_k y_{\xi\epsilon} + A_\xi(t)\bar{y}_{\xi\epsilon} + r_\xi(v_\xi \bar{y}_{\xi\epsilon}) - r_\xi f \underset{\xi, \epsilon \to 0}{\to} 0 \text{ dans } L^2(Q) \qquad (14.36)$$

$$y_\xi(0) - r_h y_0 \to 0 \text{ dans } H. \qquad (14.37)$$

De (14.36) et (14.37), il résulte (14.23) comme pour la démonstration de la proposition 14.1.

b) *propriété (14.24).*

Soit, encore notée $(p_h \bar{y}_{\xi\epsilon}, v_{\xi\epsilon})$ une sous suite extraite telle que

$$p_h \bar{y}_{\xi\epsilon} \underset{\xi, \epsilon \to 0}{\to} \varphi^* \text{ faiblement dans } L^2(0, T; F) \qquad (14.38)$$

$$v_{\xi\epsilon} \underset{\xi, \epsilon \to 0}{\to} v^* \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ (dual faible de } L^1(Q)). \qquad (14.39)$$

Le raisonnement de compacité s'applique et par conséquent

$$y_{\xi\epsilon} \underset{\xi, \epsilon \to 0}{\to} y^* \text{ *fortement* dans } L^2(Q) : \qquad (14.40)$$

alors

$$\int_0^T \left(r_\xi(v_{\xi\epsilon}\bar{y}_\xi), r_h z\right) \psi_k(t)\, dt \to \int_0^T v^* y^* z \psi(t)\, dt ; \qquad (14.41)$$

z et ψ ayant la même signification que pour la partie a). On voit alors comme pour la partie a) que $y^* = y(v^*)$. De (14.35) on déduit alors

$$J(v^*) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \qquad (14.42)$$

Les propriétés de convergence forte de (14.24) s'obtiennent sans difficultés en appliquant un raisonnement de TEMAM [57].

c) *propriété (14.22).*

Identique à la propriété c) du théorème 7.1.

15 - Observations sur la surface.

15.1 - Hypothèses - Notations.

Nous nous contenterons d'adapter le modèle déterministe du n° 9. Soit le modèle

défini par les relations

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\, y + v\, y = f \qquad (15.1)$$

$$y|_\Sigma = 0 \qquad (15.2)$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = \psi(t) \in L^2(\Sigma) \qquad (15.3)$$

$$y(0) = y_0 \in H \qquad (15.4)$$

$\psi(t)$ étant une observation telle que le système (15.1), (15.2), (15.3), (15.4) soit *compatible*. Nous supposons que v (compatible) appartient à un fermé *borné convexe* $\mathscr{U}_{ad}$ de $L^\infty(Q)$. Le problème consiste à identifier $v \in \mathscr{U}_{ad}$. Les notations sont identiques à celles de 9.1 ou à celles de 14.1. Le principe de la méthode sera de considérer deux fonctions $y_1 \equiv y_1(v)$ et $y_2 \equiv y_2(v)$ solutions de A et B respectivement,

$$A = \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + A(t)\, y_1 + v\, y_1 = f \\ y_1|_\Sigma = 0 \\ y_1(0) = y_0 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\partial y_2}{\partial t} + A(t)\, y_2 + v\, y_2 = f \\ \left.\dfrac{\partial y_2}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = \psi \\ y_2(0) = y_0 \end{cases}$$

et de chercher $v \in \mathscr{U}_{ad}$, de façon à minimiser $J(v) = \| y_1(v) - y_2(v) \|_{L^2(Q)}$. D'après l'hypothèse de compatibilité, il existe des éléments $v \in \mathscr{U}_{ad}$ *annulant* $J(v)$. Nous considérons la fonction de trois variables

$$\left.\begin{aligned} \tilde{J}_{\epsilon,\xi}(y_\xi^1, y_\xi^2, v_\xi) = |y_\xi^1 - y_\xi^2|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}\left| \nabla_k y_\xi^1 + A_\xi y_\xi^1 + r_\xi(v_\xi y_\xi^1) - r_\xi f \right|^2_{L^2(Q)} \\ + \frac{1}{\epsilon}\left| y_\xi^1(0) - r_h y_0 \right|^2_H + \frac{1}{\epsilon}\left| \nabla_k y_\xi^2 + \overline{A}_\xi(t)\, y_\xi^2 + \overline{r_\xi}(v_\xi y_\xi^2) - \overline{r_\xi}\, f - \rho_\xi \psi \right|^2_{L^2(Q)} \\ + \frac{1}{\epsilon}\left| y_\xi^2(0) - \overline{r_h} y_0 \right|^2_H \end{aligned}\right\} \qquad (15.5)$$

où $\overline{A}_\xi(t) \in \mathscr{L}(\overline{V}_h ; \overline{V}_h)$ est défini par

$$\overline{A}_\xi(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_{rk}^{(r+1)k} \overline{A}_h(t)\, dt \right) W_r(t) ; \qquad (15.6)$$

$\overline{r_\xi} \in \mathscr{L}\left(L^2(Q) ; L^2(Q)\right)$ et $\rho_\xi \in \mathscr{L}\left(L^2(\Sigma) ; L^2(Q)\right)$ étant définis par

$$\overline{r_\xi}\, \psi = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_{rk}^{(r+1)k} \overline{r_h}\, \varphi(\tau)\, d\tau \right) W_r(t) \qquad (15.7)$$

$$\rho_\xi\, \psi = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_{rk}^{(r+1)k} \rho_h\, \psi(\tau)\, d\tau \right) W_r(t) . \qquad (15.8)$$

Nous avons

Proposition 15.1 : Il existe un triplet $(y^1_{\epsilon\xi}, y^2_{\epsilon\xi}, v_{\epsilon\xi})$ (au moins), vérifiant

$$\tilde{J}_{\epsilon,\xi}(y^1_{\epsilon\xi}, y^2_{\epsilon\xi}, v_{\epsilon\xi}) = \inf_{\substack{y^1_\xi, y^2_\xi \\ v_\xi \in \mathscr{U}_{ad}}} \tilde{J}_{\epsilon,\xi}(y^1_\xi, y^2_\xi, v_\xi). \tag{15.9}$$

Démonstration : On considère une suite minimisante $y^1_{\xi n}$, $y^2_{\xi n}$, $v_{\xi n}$. Par construction $v_{\xi n}(rk\ ;\ M)$, $M \in \Omega^0_h$, $r = 0 \ldots m-1$ sont bornées. D'autre part, d'après (15.5) on a

$$|\nabla_k y^1_{\xi n} + A_\xi(t) y^1_{\xi n} + r_\xi(v_{\xi n} y^1_{\xi n}) - r_\xi f|^2_{L^2(Q)} \leqslant \text{Cte} \tag{15.10}$$

$$|\nabla_k y^2_{\xi n} + \overline{A}_\xi(t) y^2_{\xi n} + \overline{r_\xi}(v_{\xi n} y^2_{\xi n}) - \overline{r_\xi} f - \rho_\xi \phi|^2_{L^2(Q)} \leqslant \text{Cte} \tag{15.11}$$

$$|y^1_{\xi n}(0) - r_h y_0|_H \leqslant \text{Cte} \tag{15.12}$$

$$|y^2_{\xi n}(0) - \overline{r_h} y_0|_H \leqslant \text{Cte}. \tag{15.13}$$

On voit alors, comme pour la proposition 14.1, que les variables $y_{\xi n}(rk; P)$, $P \in S^0_h(\Omega)$ et $y_{\xi n}(rk; Q)$, $Q \in \Omega^1_h$ sont bornées lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent, en raison de la continuité de la fonction $\tilde{J}_{\epsilon\xi}$, la proposition est démontrée.

15.2 - Convergence lorsque $\xi, \epsilon \to 0$.

Remarque 15.1 : La forme choisie pour la fonctionnelle discrétisée $\tilde{J}_{\epsilon\xi}$ implique que dans (17.8), $\theta = 0$. On est dans le cas des schémas de discrétisation explicites (cf. [49]). Le couple $\xi = (h, k)$ doit alors vérifier une condition de *stabilité* (cf. [49] ou [57]). Naturellement, le fait que $\theta = 0$ n'a rien d'essentiel et n'a été introduit que pour simplifier l'écriture.

Théorème 15.1 : Hypothèses et notations de 15.1. Les suites $y^1_{\xi\epsilon}$, $y^2_{\xi\epsilon}$, $v_{\xi\epsilon}$ définies par (15.9) vérifient *lorsque* $\epsilon, \xi \to 0$ *simultanément :*

$$(p_h y^1_{\xi\epsilon}, \overline{p_h} y^2_{\xi\epsilon}, v_{\xi\epsilon}) \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; F) \times L^2(0, T; F) \times L^\infty(Q) \tag{15.14}$$

$$|y^1_{\xi\epsilon} - y^2_{\xi\epsilon}|_{L^2(Q)} \to 0 \tag{15.15}$$

Soit, encore notée $(p_h y^1_{\xi\epsilon}, \overline{p_h} y^2_{\xi\epsilon}, v_{\xi\epsilon})$ une sous-suite extraite, telle que $(p_h y^1_{\xi\epsilon}, p_h y^2_{\xi\epsilon})$ converge vers φ^*_1, φ^*_2 dans $L^2(0, T; F) \times L^2(0, T; F)$ faiblement et $v_{\xi\epsilon} \to v^*$ dans $L^\infty(Q)$ (dual faible de $L^1(Q)$), alors $\varphi^*_1 = \varpi y_1(v^*)$ et $\varphi^*_2 = \varpi y_2(v^*)$, $J(v^*) = 0$. De plus $p_h y^1_{\xi\epsilon}$, $p_h y^2_{\xi\epsilon}$ convergent *fortement* vers $y(v^*) = y_1(v^*) = y_2(v^*)$ dans $L^2(0, T; F)$ et $\rho_h y^1_{\xi\epsilon}(t)$, $\rho_h y^2_{\xi\epsilon}(t)$ convergent *fortement* vers $y(v^*; t)$ dans H, $\forall\, t \in [0, T]$. } (15.16)

Démonstration :

Soit (v_0, y_0) un couple compatible (i. e., $y_0 = y(v_0)$ et $J(v_0) = 0$). Nous considérons les équations

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_k \tilde{y}^1_\xi + A_\xi(t) \tilde{y}^1_\xi + r_\xi(s_\xi v_0 \tilde{y}^2_\xi) = r_\xi f \\ &\tilde{y}^1_\xi(0) = r_h y_0 \end{aligned}\right\} \tag{15.17}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_k \tilde{y}^2_\xi + \overline{A}_\xi(t) \tilde{y}^2_\xi + \overline{r_\xi}(s_\xi v_0 \tilde{y}^2_\xi) = \overline{r_\xi} f + \rho_\xi \psi \\ &\tilde{y}^2_\xi(0) = \overline{r_h} y_0. \end{aligned}\right\} \tag{15.18}$$

Pour l'équation (15.17), le théorème 14.1 donne immédiatement

$$\tilde{y}^1_\xi \to y_1(v_0) \text{ *fortement* dans } L^2(0, T; H). \tag{15.19}$$

Pour l'équation (15.18) on remarque d'abord que

$$(\rho_\xi \psi , \tilde{y}^2_\xi)_H = \left(\frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} W_r(t) \int_{rk}^{(r+1)k} \psi(t)\, dt , \gamma \tilde{y}^2_\xi \right)_{L^2(\Gamma)} ; \qquad (15.20)$$

De sorte que l'on a la majoration suivante (cf. propriété (9.31))

$$|(\rho_\xi \psi , \tilde{y}^2_\xi)|_H \leqslant C |\psi(t)|_{L^2(\Gamma)} \| \overline{p_h} \tilde{y}^2_\xi (t) \|_F , \forall\, t \in [0, T] . \qquad (15.21)$$

On peut alors raisonner comme pour le théorème 14.1. On obtient

$$\tilde{y}^2_\xi \underset{\xi \to 0}{\to} \gamma(v_0) \textit{ fortement} \text{ dans } L^2(0, T; H); \qquad (15.22)$$

De sorte que

$$\lim_{\epsilon, \xi \to 0} \tilde{J}_{\epsilon\xi} (\tilde{y}^1_\xi , \tilde{y}^2_\xi , s_\xi v_0) = 0 , \qquad (15.23)$$

ce qui entraîne

$$\lim_{\epsilon, \xi \to 0} \tilde{J}_{\epsilon,\xi} (y^1_{\xi\epsilon} , y^2_{\xi\epsilon} , v_{\xi\epsilon}) = 0 . \qquad (15.24)$$

D'où il suit (15.14) et (15.15). Le reste du théorème s'établit comme pour le théorème 14.1

2 D - Modèle parabolique : Identification des coefficients de l'Opérateur.

16 - Problème vrai et problème approché.

16.1 - Hypothèses - Notations.

Le modèle considéré ici est l'adaptation parabolique du modèle elliptique du n° 11, soit

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t; v) y = f \qquad p.\,p.\ Q \\ y|_\Sigma = 0 \\ y(0) = y_0 \end{array}\right\} \qquad (16.1)$$

A $(t; v)$ étant défini par

$$A(t; v) = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x, t)\, v(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0(x, t) . \qquad (16.2)$$

Les fonctions a_0 et $a_{i,j}$ vérifiant les relations (13.3). Le coefficient à identifier est $v(x, t)$. Nous supposons (pour éviter la régularisation) que $v \equiv v(x, t)$ appartient à

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \begin{array}{c} v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) , v' \in L^2(0, T; H) \,|\, 0 < \beta_1 \leqslant v(x, t) \leqslant \beta_2 \ p.\,p.\ Q \text{ et} \\ \| v \|^2_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + |v'|^2_{L^2(0, T; H)} \leqslant \gamma \end{array} \right\} \qquad (16.3)$$

L'observation est

$$z = \mathscr{C} y + \eta \ ; \ \mathscr{C} \in \mathscr{L}(L^2(Q) ; K) , \qquad (16.4)$$

et le critère des moindres carrés est alors

$$J(v) = \left(\Lambda^{-1} (z_d - \mathscr{C} y(v)) , z_d - \mathscr{C} y(v) \right)_K . \qquad (16.5)$$

Posons $\mathring{W}(0, T) = \{ \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \,|\, \varphi' \in L^2(0, T; H) \}$. $\mathcal{U}_{ad}$ est alors un *convexe fermé borné* dans $\mathring{W}(0, T)$.

16.2 - **Pénalisation :**

Nous introduisons la fonctionnelle $J_\epsilon(y, v)$ définie par

$$J_\epsilon(y, v) = \left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}y), z_d - \mathscr{C}y\right)_K + \frac{1}{\epsilon}\left|\frac{dy}{dt} + A(t; v) - f\right|^2_{L^2(Q)} \tag{16.6}$$

$$+ \frac{1}{\epsilon}\left| y(0) - y_0 \right|^2_H . \tag{16.7}$$

Le couple (y, v) appartient à l'ensemble W défini par

$$W = \left\{ (y, v) \mid v \in \mathscr{U}_{ad}, y \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \frac{dy}{dt} + A(t; v) \in L^2(Q) \right\} .$$

Théorème 16.1 : Hypothèses et notations de 16.1. Il existe un couple (au moins) (y_ϵ, v_ϵ) vérifiant

$$J_\epsilon(y_\epsilon, v_\epsilon) = \inf_{(y, v) \in W} J_\epsilon(y, v). \tag{16.8}$$

Démonstration : Soit (y_n, v_n) une suite minimisante. Par définition de $\mathscr{U}_{ad}$, v_n est borné dans $\tilde{W}(0, T)$. Du fait que $\frac{dy_n}{dt} + A(t; v_n) y_n$ demeure dans un borné de $L^2(Q)$ et que $y_n(0)$ demeure dans un borné de H, il résulte que $\| y_n \|_{W(0, T)}$ demeure borné. D'après le théorème de compacité de LIONS [34], on peut alors extraire une sous suite, encore notée (y_n, v_n) telle que

$$y_n \to y \text{ faiblement dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \tag{16.9}$$

$$\frac{dy_n}{dt} \to \frac{dy}{dt} \text{ faiblement dans } L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right) \tag{16.10}$$

$$v_n \to v \textit{ fortement} \text{ dans } L^2(Q). \tag{16.11}$$

On en déduit alors, aisément que

$$\frac{dy_n}{dt} + A(t; v_n) y_n \to \frac{dy}{dt} + A(t; v) y \text{ dans } \mathscr{D}(Q). \tag{16.12}$$

Par ailleurs, on peut toujours supposer (quitte à extraire une nouvelle sous suite) que

$$\frac{dy_n}{dt} + A(t; v_n) y_n - f \to \frac{dy}{dt} + A(t; v) y - f \text{ dans } L^2(Q), \text{ faiblement,} \tag{16.13}$$

et comme $y_n(0) \to y(0)$ faiblement dans H, on a

$$J_\epsilon(y, v) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} J_\epsilon(y_n, v_n) , \tag{16.14}$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème 16.2 : Hypothèses et notations de 16.1. Les suites (y_ϵ, v_ϵ) définies en (19.8) vérifient, *lorsque* $\epsilon \to 0$.

$$\left(\Lambda^{-1}(z_d - \mathscr{C}y_\epsilon), z_d - \mathscr{C}y_\epsilon\right) \to \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v) \tag{16.15}$$

$$y_\epsilon \text{ demeure dans un borné de } W(0, T) \tag{16.16}$$

Soit, encore notée (y_ϵ, v_ϵ), une sous suite extraite faiblement convergente dans $W(0, T) \times \tilde{W}(0, T)$ vers y^*, v^*, alors $y^* = y(v^*)$ et $J(v^*) = \inf_{v \in \mathscr{U}_{ad}} J(v)$. } (16.17)

Démonstration : s'adapte de celle des théorèmes 13.2 et 16.1.

CHAPITRE III

ESTIMATION ET FILTRAGE DE SYSTÈMES GOUVERNÉS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la théorie du filtrage, pour les système gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Ce problème, s'il relève toujours de l'estimation, diffère de l'identification étudiée au chapitre II, par le fait que la « boîte » définissant le système est connue, les entrées restant stochastiques et il s'agit d'estimer *l'état* du système. De plus, lorsque le système est *évolutif*, le filtrage a pour objet de fournir un algorithme d'estimation *récursif*. Le procédé d'estimation est issu de la méthode des moindres carrés.

Au paragraphe 1, nous considérons les problèmes d'optimisation rencontrés en utilisant la méthode des moindres carrés, pour les systèmes elliptiques (n° 2), paraboliques (n° 3 - 4 - 5 - 6), hyperboliques (ou bien posés au sens de Petrowsky) (n° 7 et 8). En particulier, l'important problème du découplage est étudié, qui conduit au filtrage.

Le paragraphe 2 est consacré à la dualité. Nous présentons les systèmes duaux dans le cas elliptique (n° 10), parabolique (n° 11), hyperbolique (n° 12). Puis au n° 13, nous montrons que, dans un certain sens, les méthodes de pénalisation et de régularisation sont duales l'une de l'autre. Au numéro 14, nous étudions le comportement à l'infini de l'équation de Riccati, issue du découplage.

Le paragraphe 3 a pour objet de donner les propriétés stochastiques des estimateurs que l'on considère. Dans le cas du découplage (système d'évolution), nous montrons que la solution de l'équation de Riccati s'interprète comme l'opérateur de covariance de l'erreur d'estimation. D'autres propriétés statistiques sont données (n° 17 - 19). Au paragraphe 4, nous examinons ce qu'il est possible de faire dans le cas où l'erreur d'observation n'est pas du type bruit blanc, afin d'obtenir tout de même un filtrage (en fait approché). Comme résultat annexe, nous obtiendrons une stabilité du filtre par rapport aux caractéristiques statistiques de l'erreur d'observation.

Enfin au paragraphe 5, nous donnons quelques remarques générales sur la contrôlabilité et l'observabilité.

Plan détaillé.

§1 : Problèmes de contrôle issus de la théorie de l'estimation.

1. *Quelques remarques générales.*
   - 1.1. Le modèle.
   - 1.2. Estimation au sens des moindres carrés.
   - 1.3. Orientation.
2. *Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type elliptique.*
   - 2.1. Hypothèses - Notations.
   - 2.2. Estimateur optimal.
   - 2.3. Exemple.

3. *Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type parabolique.*

3.1. Hypothèses - Notations.
3.2. Estimateur optimal.
3.3. Exemple.

4. *Filtrage pour les systèmes paraboliques.*

4.1. Hypothèses - Notations.
4.2. Opérateur P (t) - Fonctions $r\ (t)$.
4.3. Calcul d'identification formel.

5. *Justification des calculs formels.*
5.1. Le cas de la dimension finie - Approximation.
5.2. Découplage de (5.8.).
5.3. Passage à la limite.
5.4. Equation de Riccati.

6. *Exemple de filtrage parabolique.*

7. *Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique ou « bien posé » au sens de Petrowsky.*

7.1. Hypothèses - Notations.
7.2. Estimateur optimal.
7.3. Nouvelle définition de l'estimateur optimal.

8. *Filtrages des systèmes du type (7.34), (7.48).*

8.1. Hypothèses - Notations.
8.2. Opérateur $\mathscr{P}\ (t)$ - Fonction $\overrightarrow{r}\ (t)$.
8.3. Equation de Riccati.

§2 : Dualité entre estimation et contrôle.

9. *Rappel de résultats généraux.*

9.1. Orientation.
9.2. Théorème général de dualité.
9.3. Variante du théorème général.

10. *Application aux systèmes elliptiques.*

10.1. Hypothèses - Notations - 1re possibilité d'utilisation du n° 9.
10.2. Construction de systèmes duaux.
10.3. Etude directe des systèmes duaux.

11. *Application aux systèmes paraboliques.*

11.1. Construction de systèmes duaux - Hypothèses - Notations.
11.2. Etude directe des systèmes duaux.

12. *Application aux systèmes de type hyperbolique ou « bien posé » au sens de Petrowsky.*

12.1. Construction de systèmes duaux - Hypothèses - Notations.
12.2. Etude directe des systèmes duaux.
12.3. Nouvelle écriture du problème dual.

13. *Dualité et pénalisation.*

13.1. Orientation.
13.2. Définition de $\Pi\ (\varphi\ ,\ \psi)$ et $F_\epsilon\ (\varphi)$.
13.3. Recherche de la fonctionnelle duale $F_\epsilon^*(\varphi)$.
13.4. Définition des systèmes duaux.
13.5. Etude directe des systèmes duaux.
13.6. Interprétation de (13.20), (13.21).
13.7. Convergence lorsque $\epsilon \to 0$.

14. *Comportement à l'infini de la solution P (t) de l'équation de Riccati (5.49).*

14.1. Orientation.
14.2. Hypothèses - Notations.
14.3. Le cas $\tau = +\infty$.
14.4. Passage à la limite lorsque $\tau \to +\infty$.

§3 : Propriétés stochastiques des estimateurs.

15. *Orientation générale - Cas des systèmes elliptiques.*

15.1. Orientation.
15.2. Cas des systèmes elliptiques.

16. *Cas des systèmes paraboliques.*

16.1. Hypothèses - Notations - Rappels.
16.2. Erreur d'estimation.
16.3. Caractéristiques stochastiques de l'erreur.

17. *Propriétés de l'opérateur de covariance P (T).*

17.1. Une propriété d'optimalité de P (T).
17.2. Etude du cas particulier B = 0.
17.3. Autres propriétés de P (T) et P_1 (T).

18. *Cas des systèmes du type hyperbolique ou « bien posé » au sens de Petrowsky.*

18.1. Hypothèses - Notations - Rappels.
18.2. Erreur d'estimation.
18.3. Caractéristiques stochastiques de l'erreur.

19. *Propriétés de l'opérateur de covariance* $\mathcal{P}$(T).

19.1. Une propriété d'optimalité de $\mathcal{P}$(T).
19.2. Majorations à priori.

§4 : Filtrage dans le cas d'observations faites sans erreur.

20. *Orientation générale - Cas des systèmes complètement déterministes.*

20.1. Orientation.
20.2. Cas des systèmes complètement déterministes.

21. *Système stochastique - Observation sans erreur.*

21.1. Hypothèses - Notations - Le problème.
21.2. Définition de l'estimateur optimal.
21.3. Estimateur optimal approché.
21.4. Théorème de convergence.

§5 : Remarques générales sur la contrôlabilité et l'observabilité.

22. *Orientation générale - Contrôlabilité.*

22.1. Orientation.
22.2. Contrôlabilité.
22.3. Définition de la contrôlabilité des systèmes stochastiques.

23. *Observabilité.*

23.1. Observabilité déterministe.
23.2. Un cas de système complètement observable.
23.3. Observabilité des systèmes stochastiques.

§ 1 : Problèmes de Contrôle issus de la théorie de l'estimation

1. Quelques remarques générales.

1.1. Le modèle.

Nous reprenons les notations du n° 1 du Chapitre II. Le modèle général est

$$Py = B\xi + f \qquad (1.1)$$

$$\mathscr{A}_j y = \xi_j \; ; \quad j = 1 \ldots N. \qquad (1.2)$$

Contrairement au n° 1, nous supposons ici les opérateurs P et $\mathscr{A}_j$ *parfaitement connus.* Par contre *l'entrée* ξ , ξ_j du système sera *stochastique,* comme au n° 1.2 du Chapitre II. De plus il y a une *observation* (ou *sortie*) du système (1.1), (1.2) définie par l'application de $\Phi \times K \to K$ suivante [1]

$$z = \mathscr{C}\, y(\omega, \xi_j) + \eta \text{ où } (\xi\ , \xi_j) \in \Phi \text{ et } \eta \in K. \qquad (1.3)$$

Comme au n° 1.2 (Chap. II) l'espace $\Phi \times K$ est muni d'une mesure cylindrique δ.

1.2. Estimation au sens des moindres carrés.

Nous considérons ici, que $(\xi, \xi_j) = u$ est le paramètre *inconnu* du modèle (1.1), (1.2). L'espace U des paramètres coïncide avec l'espace Φ des entrées. Il y a cependant de profondes *différences* entre le modèle considéré ici et celui présenté au n° 1.2 (Chap. II). Tout d'abord, comme il a été signalé au n° 1.1, la boîte $\{ P, \mathscr{A}_j \}$ définissant le système est *indépendante* du paramètre inconnu, dont seule dépend l'entrée (en fait nous considérons que l'entrée coïncide avec le paramètre). D'autre part, le paramètre inconnu possède ici des propriétés stochastiques *objectives,* (c'est-à-dire déterminables par l'expérience), alors que ce n'était pas le cas dans le Chapitre II. La théorie des moindres carrés que nous allons appliquer ici est celle *présentée* au n° 8 du Chapitre I.

1.3. Orientation.

Il est assez clair, d'après la définition 8.1 (Chap. I) de l'estimation au sens des moindres carrés, que la minimisation de la fonctionnelle J (u) définie en (8.5) (Chap. I), conduit à des *problèmes de théorie du contrôle optimal.* Nous allons tout d'abord étudier ces problèmes pour les systèmes successivement elliptiques, paraboliques, hyperboliques (ou bien posés au sens de Petrowsky), en appliquant largement les méthodes de J.-L. LIONS (cf. [35]). Ce sera l'objet du § 1 du présent chapitre. Ensuite nous regarderons les propriétés stochastiques des estimateurs obtenus.

Remarque 1.1 : Dans le chapitre II, nous avons[2] appelé *« Identification »* le problème de la détermination du paramètre *inconnu* u intervenant dans les opérateurs $\{P, \mathscr{A}_j\}$. Ici le paramètre inconnu est $u = (\xi, \xi_j)$, entrée du système. Ce qui nous intéresse, c'est *d'estimer* l'état y, sur le vu de l'observation. Suivant la terminologie statistique usuelle, nous appelerons ce problème, *« Estimation »* de l'état du système (ou estimation du système, pour simplifier). Bien entendu le problème de l'identification et celui de l'estimation sont sensiblement différents.

Remarque 1.2 : Dans le cas des systèmes d'évolution (paraboliques, hyperboliques etc...), l'observation sera en général *évolutive* également (problèmes dits en « Temps réel »). Dans ce cas, ce qui nous intéresse, c'est *d'estimer* l'état *présent* du système (c'est-à-dire compte tenu de l'observation jusqu'à l'instant présent). Nous appelerons ce problème, *« Filtrage »*, en suivant la terminologie de WIENER [60] et de KALMAN-BUCY [14].

---

(1) Nous rappelons que les espaces de Hilbert Φ et K sont définis au n° 1.1 (Chap. II) et que K est *l'espace des observations.*

(2) En suivant une terminologie généralement utilisée.

2. Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type elliptique [1].

2.1. Hypothèses - Notations.

V et H sont deux espaces de Hilbert, avec

$$V \subset H \text{ et l'injection de V dans H est continue} \tag{2.1}$$

On identifie H et son dual. Alors si V′ désigne le dual de V, on a

$$V \subset H \subset V'. \tag{2.2}$$

On considère le modèle

$$Ay = f + B\xi, \tag{2.3}$$

où $A \in \mathscr{L}(V; V')$ vérifie

$$< A\varphi, \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2, \quad \varphi \in V; \alpha > 0 \tag{2.4}$$

et $B \in \mathscr{L}(E; V')$ où E est un espace de Hilbert; $f \in V'$ donné. L'observation est définie par

$$z = \mathscr{C} y + \eta, \tag{2.5}$$

où $\mathscr{C} \in \mathscr{L}(V; K)$. Au couple $(\xi, \eta) \in E \times K$, nous associerons la propriété stochastique suivante :

L'espace $E \times K$ est muni d'une *mesure cylindrique* d'espérance mathématique $(\overline{\xi}, 0)$ et d'opérateur de covariance $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ où $Q \in \mathscr{L}(E'; E)$ et $R \in \mathscr{L}(K'; K)$ sont autoadjoints, définis > 0 et *inversibles*. } (2.6)

La fonctionnelle des moindres carrés ((8.5), Chap. I) est alors

$$J(\xi) = < Q^{-1}(\xi - \overline{\xi}), \xi - \overline{\xi} > + < R^{-1}(z - \mathscr{C} y(\xi)), z - \mathscr{C} y(\xi) >, \tag{2.7}$$

et le problème consiste alors, pour z *fixé* $\in K$, à *minimiser* la fonctionnelle $J(\xi)$.

2.2. Estimateur optimal.

La fonctionnelle $J(\xi)$ étant une fonctionnelle quadratique cœrcive, elle possède un minimum unique $\hat{\xi}$. Nous allons calculer $\hat{\xi}$ et plus précisément $\hat{y} = y(\hat{\xi})$, *estimateur optimal de l'état y du système (2.3), (2.5).*

Théorème 2.1 : Hypothèses et notations de 2.1. Le système (en $\hat{y}, p$)

$$A\hat{y} + BQB^* p = f + B\overline{\xi} \tag{2.8}$$

$$A^* p - \mathscr{C}^* R^{-1} \mathscr{C} \hat{y} = \mathscr{C}^* R^{-1} z \tag{2.9}$$

possède une solution unique. *L'estimateur optimal est alors* $\hat{y}$.

Démonstration : Posons $\overline{y}$, solution de

$$A\overline{y} = f \tag{2.10}$$

et $\tilde{y}(\xi)$ solution de

$$A\tilde{y} = B\xi. \tag{2.11}$$

---

(1) Pour le raccord avec les considérations générales, cf. remarque 2.1, Chap. II. La transposition est analogue.

Alors J (ξ) s'écrit

$$J(\xi) = < Q^{-1}\,\xi, \xi > + < R^{-1}\,\mathscr{C}\tilde{y}(\xi), \mathscr{C}\tilde{y}(\xi) > - 2 < Q^{-1}\,\xi, \bar{\xi} > \qquad (2.12)$$

$$- 2 < R^{-1}\,(z - \mathscr{C}\,\bar{y})\,, \mathscr{C}\,\tilde{y}\,(\xi) > + \text{Cte}$$

L'élément $\hat{\xi}$ minimal est alors solution de l'équation d'Euler (cf. [35])

$$< Q^{-1}\,(\hat{\xi} - \bar{\xi}), \xi_1 > + < R^{-1}\,\mathscr{C}\tilde{y}\,(\hat{\xi}), \mathscr{C}\tilde{y}\,(\xi_1) > \qquad (2.13)$$

$$- < R^{-1}\,(z - \mathscr{C}\,\bar{y}), \mathscr{C}\,\tilde{y}\,(\xi_1) > = 0, \qquad \forall\, \xi_1 \in E;$$

soit puisque $\hat{y} = \bar{y} + \hat{y}\,(\hat{\xi})$

$$< Q^{-1}\,(\hat{\xi} - \bar{\xi}), \xi_1 > + < R^{-1}\,\mathscr{C}\hat{y}, \mathscr{C}\tilde{y}\,(\xi_1) > - < R^{-1}\,z, \mathscr{C}\,\tilde{y}\,(\xi_1) > = 0. \qquad (2.14)$$

Soit alors p solution de

$$A^*\,p = \mathscr{C}^*\,R^{-1}\,\mathscr{C}\,\hat{y} - \mathscr{C}^*\,R^{-1}\,z\,. \qquad (2.15)$$

L'équation (2.14) s'écrit

$$< Q^{-1}\,(\hat{\xi} - \bar{\xi}), \xi_1 > + < p, B\xi_1 > = 0 \qquad \forall\, \xi_1, \qquad (2.16)$$

soit

$$\hat{\xi} = \bar{\xi} - QB^*\,p \qquad (2.17)$$

et en reportant dans (2.3), il en résulte (2.8).

2.3. **Exemple :**

Nous prenons pour A l'opérateur aux dérivées partielles du n° 5.1 du Chapitre II. On considère le modèle $\left(f = 0, E = L^2(\Gamma), H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega)\right)$

$$\left.\begin{aligned} &Ay = 0 \\ &\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_\Gamma = \xi. \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

On sait que, sous forme variationnelle, (2.18) s'écrit

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}\,(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0\,(x)\; yz\, dx = \int_\Gamma \xi\,(\gamma\, z)\, d\Gamma \qquad \forall\, z \in H^1(\Omega);$$

γz désigne la trace de z sur Γ; On sait (cf. [34]) que $\gamma \in \mathscr{L}\left(H^1(\Omega); L^2(\Gamma)\right)$.

Alors $B = \gamma^*$ $\left(\in \mathscr{L}\,(L^2(\Gamma); V')\right)$. L'observation z est définie par

$$z = y|_\Gamma + \eta\,, \qquad (2.20)$$

autrement dit, $\mathscr{C} = \gamma$ et $K = L^2(\Gamma)$. Nous pensons $Q \in \mathscr{L}\left(L^2(\Gamma); L^2(\Gamma)\right)$ égal à $\sigma_1^2\, I$ et $R \in \mathscr{L}\left(L^2(\Gamma); L^2(\Gamma)\right)$ égal à $\sigma_2^2\, I$. Le système (2.8), (2.9) s'écrit

$$A\hat{y} + (\gamma^*\,\gamma p)\,\sigma_1^2 = \gamma^*\,\bar{\xi} \qquad (2.21)$$

$$A^*\,p - \frac{\gamma^*\,\gamma\hat{y}}{\sigma_2^2} = -\frac{\gamma^*}{\sigma_2^2}\,z, \qquad (2.22)$$

autrement dit, sous forme variationnelle

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,(x) \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_j} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + a_0\,(x)\; \hat{y}\; y_1\right] dx + \sigma_1^2 \int_\Gamma p|_\Gamma\; y_1|_\Gamma\, d\Gamma \qquad (2.23)$$

$$= \int_\Gamma \bar{\xi}\; y_1|_\Gamma\, d\Gamma$$

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{j,i}(x) \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + a_0(x)\, p\, p_1 \right] dx - \frac{1}{\sigma_2^2} \int_\Gamma \hat{y}|_\Gamma\, p_1|_\Gamma\, d\Gamma \qquad (2.24)$$

$$= -\frac{1}{\sigma_2^2} \int_\Gamma z\, p_1|_\Gamma\, d\Gamma$$

$\forall\ y_1, p_1 \in H^1(\Omega)$.

Remarque 2.1 : On peut traiter également le cas « Dirichlet non homogène », *i.e.*, le cas où la deuxième équation (2.18) est remplacée par

$$y|_\Gamma = \xi. \qquad (2.25)$$

Mais cela ne résulte pas directement du modèle (2.3), car, comme on sait (cf. [34]), le problème « Dirichlet non homogène » n'est pas variationnel. Il faut alors utiliser les méthodes de LIONS-MAGENES (cf. [37]).

3. Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type parabolique.

3.1. Hypothèses - Notations.

Les notations non redéfinies sont identiques à celles de 2.1. On se donne une famille $A(t)$, $t \in [0, T]$ désignant le temps, d'opérateurs $\in \mathcal{L}(V; V')$ vérifiant[1]

$$< A(t)\varphi, \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|^2 \qquad \forall \varphi \in V \qquad (3.1)$$

$$t \to < A(t)\varphi, \psi > \text{ est mesurable } \forall\ t \in [0, T]. \qquad (3.2)$$

On considère le système défini par (y = état du système)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = f(t) + B(t)\, \xi(t) \\ &y(0) = \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

où

$$B(t) \in \mathcal{L}(E; V'); \quad B \equiv B(t) \in \mathcal{L}\left(L^2(0, T; E); L^2(0, T; V')\right) \qquad (3.4)$$

$$f(t) \in L^2(0, T, V') \qquad (3.5)$$

$$\zeta \in H. \qquad (3.6)$$

L'observation est alors définie par

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\, y(t) + \eta(t), \qquad t \in [0, T]; \qquad (3.7)$$

où

$$\mathscr{C}(t) \in \mathcal{L}(V; F), \text{ F espace de Hilbert donné}; \quad \mathscr{C} \equiv \mathscr{C}(t) \in \mathcal{L}\left(L^2(0, T; V); L^2(0, T; F)\right) \qquad (3.8)$$

L'espace K des observations est donc ici $L^2(0, T; F)$. Les hypothèses sur le caractère

---

(1) On notera $a(t; \varphi, \psi) = < A(t)\varphi, \psi > \varphi, \psi \in V$.

stochastique de l'entrée ζ, $\xi(t)$ et de l'erreur $\eta(t)$ sont :

L'espace $H \times L^2(0, T; E) \times L^2(0, T; F)$ est muni d'une mesure cylindrique d'espérance mathématique $(\bar{\zeta}, \bar{\xi}(t), 0)$ et d'opérateur de covariance défini par la matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(t) & 0 \\ 0 & 0 & R(t) \end{pmatrix}$ où $P_0 \in \mathscr{L}(H; H)$ autoadjoint, défini positif et *inversible.*

$Q(t) \in \mathscr{L}(E'; E)$ $\forall\, t \in [0, T]$ autoadjoint, défini positif et *inversible.*
$R(t) \in \mathscr{L}(F'; F)$ $\forall\, t \in [0, T]$ autoadjoint, défini positif et *inversible.* (3.9)

La fonctionnelle des moindres carrés est alors

$$J(\zeta, \xi) = (P_0^{-1}(\zeta - \bar{\zeta}), \zeta - \bar{\zeta}) + \int_0^T < Q^{-1}(t)(\xi(t) - \bar{\xi}(t)), \xi(t) - \bar{\xi}(t) > dt \qquad (3.10)$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)(z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \xi, \zeta)), z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \xi, \zeta) > dt.$$

Il s'agit de minimiser $J(\zeta, \xi)$ sur $H \times L^2(0, T; E)$.

3.2. Estimateur optimal.

La fonctionnelle $J(\zeta, \xi)$ possède un minimum unique $\hat{\zeta}, \hat{\xi}$. Nous posons $\hat{y}_T = y(T; \hat{\zeta}, \hat{\xi}) \in H^{(1)}$. Ce qui nous intéresse, c'est de calculer $\hat{y}_T$ estimateur optimal de l'état $y(T)$ du système, sur le vu de l'observation $z[0, T]$ (on considère que T représente l'instant *présent*). Nous avons alors

Théorème 3.1 : Hypothèses et notations de 3.1. Le système en (y_T, p_T).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + A(t) y_T + B(t) Q(t) B^*(t) p_T = f(t) + B(t) \bar{\xi}(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t) p_T - \mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) y_T = -\mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t) z(t) \\ &y_T(0) = \bar{\zeta} - P_0 p_T(0) \\ &p_T(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

possède une solution unique. L'estimateur optimal $\hat{y}_T$ est alors

$$\hat{y}_T = y_T(T). \qquad (3.12)$$

Démonstration : Soit $\bar{y}$ la solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\bar{y}}{dt} + A(t) \bar{y} = f \\ &\bar{y}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

et $\tilde{y}(\zeta, \xi)$ la solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tilde{y}}{dt} + A(t) \tilde{y} = B(t) \xi(t) \\ &\tilde{y}(0) = \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

Alors la fonctionnelle $J(\zeta, \xi)$ s'écrit

$$J(\zeta, \xi) = (P_0^{-1} \zeta, \zeta) + \int_0^T < Q^{-1}(t) \xi(t), \xi(t) > dt + \qquad (3.15)$$

(1) La solution de (3.3) est, comme on sait, continue de $[0, T] \to H$ (cf. [34]).

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\, \mathscr{C}(t)\, \tilde{y}(t;\zeta,\xi), \mathscr{C}(t)\, \tilde{y}(t;\zeta,\xi) > dt - 2\,(P_0^{-1}\zeta,\zeta)$$

$$- 2\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\xi(t), \overline{\xi}(t) > dt - 2\int_0^T < R^{-1}(t)\,(z(t) - \mathscr{C}(t)\,\overline{y}) ,$$

$$\mathscr{C}(t)\,\tilde{y}(t;\zeta,\xi) > + \text{Cte.}$$

Alors $\hat{\zeta}$, $\hat{\xi}$ est solution de l'équation d'Euler

$$(P_0^{-1}(\hat{\zeta} - \overline{\zeta}), \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\,(\xi(t) - \overline{\xi}(t)), \xi_1(t) > dt \qquad (3.16)$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\,(\mathscr{C}(t)\,y(t;\hat{\zeta},\hat{\xi}) - z(t)), \mathscr{C}(t)\,\tilde{y}(t;\zeta_1,\xi_1) > dt = 0.$$

Posons $y_T = y(\hat{\zeta},\hat{\xi})$ et soit p_T la solution de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_T}{dt} + A^*\,p_T = \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y_T - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ &p_T(T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

Alors (3.16) s'écrit

$$(P_0^{-1}(\hat{\zeta} - \overline{\zeta}), \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\,(\hat{\xi}(t) - \overline{\xi}(t)), \xi_1(t) > dt \qquad (3.18)$$

$$+ \int_0^T < -\frac{dp_T}{dt} + A^*\,p_T, y(\zeta_1,\xi_1) > dt = 0 ,$$

et en utilisant l'intégration par parties (valide dans $W(0,T) = \{\varphi \in L^2(0,T;V) \mid \varphi' \in L^2(0,T;V')\}$, cf. [37]) on obtient

$$(P_0^{-1}(\hat{\zeta} - \overline{\zeta}), \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\,(\hat{\xi}(t) - \overline{\xi}(t)), \xi_1(t) > dt + (p_T(0), \zeta_1) \qquad (3.19)$$

$$+ \int_0^T < p_T, B(t)\,\xi_1(t) > dt = 0, \forall\, \zeta_1 \in H; \forall\, \xi_1 \in L^2(0,T;E)$$

soit

$$\hat{\zeta} = \overline{\zeta} - P_0\,p_T(0) \qquad (3.20)$$

$$\hat{\xi}(t) = \overline{\xi}(t) - Q(t)\,B^*(t)\,p_T(t), \qquad (3.21)$$

ce qui entraîne que y_T et p_T sont solutions de (3.11).

3.3 Exemple.

Nous considérons l'adaptation parabolique de l'exemple 2.3, soit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\,y = 0 \\ &\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\bigg|_\Sigma = \xi(t) \\ &y(0) = \zeta . \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Nous avons $f = 0$, $E = L^2(\Gamma)$. L'observation est définie par

$$z(t) = y|_\Sigma + \eta(t) , \qquad (3.23)$$

soit $F' = L^2(\Gamma)$ et $\mathscr{C}(t) = \gamma$. Nous prenons $P_0 = \sigma_3^2\,I$, $Q(t) = \sigma_1^2\,I$ et $R(t) = \sigma_2^2\,I$, de

sorte que le système (3.11) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + A(t)\, y_T + \sigma_1^2\, \gamma^*\, \gamma\, p_T = \gamma^*\, \bar{\xi}(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t)\, p_T - \frac{\gamma^*\,\gamma}{\sigma_2^2}\, y_T = -\frac{\gamma^*\, z(t)}{\sigma_2^2} \\ &y_T(0) = \bar{\zeta} - \sigma_3^2\, p_T(0) \\ &p_T(T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

soit, sous forme variationnelle,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(y_T(t), y_1) + \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\, \frac{\partial y_T(t)}{\partial x_j}\, \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + a_0(x,t)\, y_T\, y_1\right] dx \\ &+ \sigma_1^2 \int_\Gamma p_T(t)|_\Gamma\, y_1|_\Gamma\, d\Gamma = \int_\Gamma \bar{\xi}(t)\, y_1|_\Gamma\, d\Gamma \qquad \forall\, y_1 \in H_1(\Omega) \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}(p_T(t), p_1) + \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{j,i}(x,t)\, \frac{\partial p_T(t)}{\partial x_j}\, \frac{\partial\, p_1}{\partial\, x_i} + a_0(x,t)\, p_T(t)\, p_1\right] dx \\ &-\frac{1}{\sigma_2^2} \int_\Gamma y_T(t)|_\Gamma\, p_1|_\Gamma\, d\Gamma = -\frac{1}{\sigma_2^2} \int_\Gamma z(t)\, p_1|_\Gamma\, d\Gamma \qquad \forall\, p_1 \in H_1(\Omega) \end{aligned}\right\} \quad (3.26)$$

$$y_T(0) = \bar{\zeta} - \sigma_3^2\, p_T(0) \quad (3.27)$$

$$p_T(T) = 0. \quad (3.28)$$

4. Filtrage pour les systèmes paraboliques.

Orientation : Nous allons nous intéresser maintenant à l'application $T \to \hat{y}_T$, de façon à obtenir un *algorithme récurrent* pour l'estimateur optimal $\hat{y}_T$, généralisant le filtre de KALMAN - BUCY pour les équations différentielles. Nous nous baserons sur la théorie du découplage des systèmes du type (3.11) étudiée par J.-L. LIONS [35] (1)

4.1 Hypothèses - Notations.

Posons

$$D_1(t) = B(t)\, Q(t)\, B^*(t) \in \mathcal{L}(V; V'), \text{ autoadjoint} > 0 \quad (4.1)$$

$$D_2(t) = \mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, \mathscr{C}(t) \in \mathcal{L}(V; V'), \text{ autoadjoint} > 0 \quad (4.2)$$

$$f_1(t) = f(t) + B(t)\, \bar{\xi}(t) \in L^2(0, T; V') \quad (4.3)$$

$$f_2(t) = -\mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t) \in L^2(0, T; V'). \quad (4.4)$$

Le système (3.11) s'écrit alors

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + A(t)\, y_T + D_1(t)\, p_T = f_1(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t)\, p_T - D_2(t)\, y_T = f_2(t) \\ &y_T(0) = \bar{\zeta} - P_0\, p_T(0) \\ &p_T(T) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

(1) On retrouve les systèmes étudiés par LIONS, en faisant $P_0 = 0$.

4.2 **Opérateur P (*t*), fonction *r* (*t*).**

Lemme 4.1 : Le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\,\varphi + D_1(t)\,\psi = f_1(t) \qquad t \in]0, s[\\ &-\frac{d\psi}{dt} + A^*(t)\,\psi - D_2(t)\,\varphi = f_2(t) \qquad t \in]0, s[\\ &\varphi(0) = \overline{\zeta} - P_0\,\psi(0) \\ &\psi(s) = h \in H, \text{ donné} \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

admet une solution unique.

Démonstration : Le système (4.7) est le système des équations d'Euler correspondant au problème de contrôle suivant :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\,\varphi = f(t) + B(t)\,u(t) \qquad t \in]0, s[\\ &\varphi(0) = v, \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

avec comme critère

$$J_s^h(u, v) = \left(P_0^{-1}(v - \overline{\zeta}),\, v - \overline{\zeta}\right)_H + \int_0^s \langle Q^{-1}(t)\left(u(t) - \overline{\xi}(t)\right),\, u(t) - \overline{\xi}(t)\rangle\, dt \qquad (4.9)$$

$$+ \int_0^s \langle R^{-1}(t)\ \left(z(t) - \mathscr{C}(t)\,\varphi(t; u, v)\right),\ z(t) - \mathscr{C}(t)\,\varphi(t; u, v)\rangle\, dt + 2\left(h, \varphi(s; u, v)\right)_H$$

On introduit l'état adjoint par

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\psi}{dt} + A^*(t)\,\psi = \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\varphi - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \qquad t \in]0, s[\\ &\psi(s) = h. \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

On trouve alors aisément que le v et u optimaux sont donnés par

$$u(t) = \overline{\xi}(t) - Q(t)\,B^*(t)\,\psi(t) \qquad (4.11)$$

$$v = \overline{\zeta} - P_0\,\psi(0). \qquad (4.12)$$

On retombe sur le système (4.7).

De plus

Lemme 4.2 : L'application $h \to \{\varphi, \psi\}$ solution de (4.7) est continue de H dans W $(0, s)$ $\times$ W $(0, s)$ où W $(0, s) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0, s; V), \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, s; V')\}$. Cette application est affine.

Démonstration.

La partie linéaire de l'application correspond au cas où f_1 , f_2 , $\overline{\zeta}$ sont nuls.

Soit $\hat{u}_n$, $\hat{v}_n$ le contrôle optimal pour $J_s^{hn}(u, v)$ et $\hat{u}$, $\hat{v}$ le contrôle optimal pour $J_s^h(u, v)$. Posons

$$\varphi_n(t) = \varphi(t; \hat{u}_n, \hat{v}_n) \text{ solution de (4.8) pour } (u, v) = (\hat{u}_n, \hat{v}_n) \qquad (4.13)$$

$$\varphi(t) = \varphi(t; \hat{u}, \hat{v}) \text{ solution de (4.8) pour } (u, v) = (\hat{u}, \hat{v}). \qquad (4.14)$$

Il faut montrer que si

$$h_n \to h \text{ } \textit{fortement} \text{ dans H}, \tag{4.15}$$

alors

$$\varphi_n(t), \psi_n(t) \to \textit{fortement} \text{ vers } \varphi(t), \psi(t) \text{ dans } W(0, s) \times W(0, s). \tag{4.16}$$

Désignons par $\mathscr{U}(0, s) = H \times L^2(0, T; E)$ l'espace des contrôles $\theta(u, v)$. Nous avons

$$J_s^{h_n}(\hat{u}_n, \hat{v}_n) = \inf_{(u, v)} J_s^{h_n}(u, v) \leqslant J_s^{h_n}(\hat{u}, \hat{v}) \tag{4.17}$$

et $J_s^{h_n}(\hat{u}, \hat{v}) \to J_s^h(\hat{u}, \hat{v})$,

donc

$$\limsup_{n \to +\infty} J_h^{h_n}(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \leqslant J_s^h(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{(u, v) \in \mathscr{U}(0, s)} J_s^h(u, v), \tag{4.18}$$

à partir d'un certain rang, nous avons

$$|(h_n, \varphi(s; \hat{u}_n, \hat{v}_n))| \leqslant C \| \hat{\theta}_n \|_{\mathscr{U}(0, s)} \tag{4.19}$$

donc

$$J_s^{h_n}(\hat{\theta}_n) \geqslant v \| \hat{\theta}_n \|^2_{\mathscr{U}(0, s)} - 2C \| \hat{\theta}_n \|_{\mathscr{U}(0, s)} \tag{4.20}$$

donc à partir d'un certain rang

$$v \| \hat{\theta}_n \|^2_{\mathscr{U}(0, s)} - 2C \| \hat{\theta}_n \|_{\mathscr{U}(0, s)} - k \leqslant 0, \; k > 0, \tag{4.21}$$

ce qui implique

$$\| \hat{\theta}_n \|_{\mathscr{U}(0, s)} \text{ borné}. \tag{4.22}$$

On peut donc extraire une sous-suite $\hat{\theta}_\mu$, qui converge faiblement vers $\tilde{\theta}$ dans $\mathscr{U}(0, s)$. Alors

$$\varphi_\mu(t) \to \varphi(t; \tilde{\theta}) \text{ dans } W(0, s) \text{ faiblement}, \tag{4.23}$$

et

$$J_s^h(\tilde{\theta}) \leqslant \liminf_{\mu \to +\infty} J_s^{h_\mu}(\hat{\theta}_\mu) \tag{4.24}$$

soit

$$J_s^h(\tilde{\theta}) \leqslant J_s^h(\hat{\theta}) \tag{4.25}$$

et

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta}. \tag{4.26}$$

Donc toute la suite $\hat{\theta}_n \to \hat{\theta}$ dans $\mathscr{U}(0, s)$ *faiblement*. Ceci implique

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t) \text{ dans } W(0, s) \textit{ faiblement} \tag{4.27}$$

$$\psi_n(t) \to \psi(t) \text{ dans } W(0, s) \textit{ faiblement}, \tag{4.28}$$

ceci montre la continuité de H fort dans $W(0, s) \times W(0, s)$ faible de la partie linéaire de l'application

$$h \to \{\varphi, \psi\}, \tag{4.29}$$

ce qui suffit pour avoir le lemme.

Corollaire 4.1 : Pour $h \in H$, soit $\{ \varphi, \psi \}$ la solution de (4.7). L'application

$$h \to \varphi(s) \tag{4.30}$$

est affine continue de $H \to H$.

Démonstration : L'application (4.30) est composé de $h \to \{ \varphi, \psi \}$ et de $\{ \varphi, \psi \} \to \varphi(s)$ qui est continue de $W(0, s) \times W(0, s)$ dans H (cf. J.-L. LIONS [34]).

Corollaire 4.2 : L'application (4.30) s'écrit de manière unique

$$\varphi(s) = r(s) - P(s)\, h \tag{4.31}$$

$P(s) \in \mathcal{L}(H; H)$, $r(s) \in H$ ■

Nous allons maintenant montrer l'identité fondamentale.

Lemme 4.3 : Soit (y_T, p_T) la solution de (3.11). On a

$$y_T(t) = r(t) - P(t)\, p(t) \qquad \forall\, t \in]0, T[\quad \text{où} \tag{4.32}$$

$P(t)$ et $r(t)$ sont déterminés de la façon suivante :

On résout

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta + D_1(t)\,\gamma = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans }]0, s[\\ &-\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\,\gamma - D_2(t)\,\beta = 0 \\ &\beta(0) = -P_0\,\gamma(0) \\ &\gamma(s) = h. \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

Alors

$$\beta(s) = -P(s)\, h;$$

On résout

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dt} + A(t)\,\eta + D_1(t)\,\chi = f_1(t) \\ &-\frac{d\chi}{dt} + A^*(t)\,\chi - D_2(t)\,\eta = f_2(t) \qquad t \in]0, s[\\ &\eta(0) = P_0\,\chi(0) + \zeta \\ &\chi(s) = 0 \end{aligned}\right. \tag{4.34}$$

alors $r(s) = \eta(s)$.

Démonstration :

Considérons (4.7) avec $h = p_T(s)$. Alors si on définit

$$\tilde{\varphi} \text{ (resp. } \tilde{\psi}) = \text{restriction de } y_T \text{ (resp. } p_T) \text{ à }]0, s[\,, \tag{4.35}$$

$\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ satisfont à (4.7). Donc $\varphi = \tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$, donc $\varphi(s) = y_T(s)$, et $y_T(s) = r(s) - P(s)\, p_T(s)$. Comme s est quelconque, on a le résultat ■

Nous allons donner maintenant des propriétés de $P(t)$.

Lemme 4.4.

$P(t)$ est autoadjoint (4.36)

$t \to (P(t)\, h, \overline{h})$ est continue sur $\left[\, 0, T \,\right]$, $\forall\, h, \overline{h} \in H$. *(4.37)*

Démonstration :

Soit, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ la solution de (4.33) correspondant à $\overline{h}$. Nous avons

$$0 = \int_0^s \left(\frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta + D_1(t)\,\gamma\,,\ \overline{\gamma}(t) \right) dt = \big(\beta(s)\,,\ \overline{\gamma}(s)\big) - \big(\beta(0)\,,\ \overline{\gamma}(0)\big)$$

$$+ \int_0^s < \beta(t)\,,\ -\frac{d\overline{\gamma}}{dt} + A^*(t)\,\overline{\gamma} > dt + \int_0^s < D_1(t)\,\gamma\,,\ \overline{\gamma}(t) > dt\,,$$

d'où

$$\big(P(s)\,h\,,\ \overline{h}\big) = \big(P_0\,\gamma(0)\,,\ \overline{\gamma}(0)\big) + \int_0^s < \beta(t)\,,\ D_2(t)\,\overline{\beta}(t) > dt$$

$$+ \int_0^s < D_1(t)\,\gamma(t)\,,\ \overline{\gamma}(t) > dt\,, \qquad (4.38)$$

formule symétrique, donc (4.36) est démontré. Pour démontrer (4.37), nous allons nous ramener à un intervalle fixe. Posons

$$t = \tau\, s \qquad \tau \in \left[\, 0, 1 \,\right] \qquad (4.39)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_s(\tau) &= \beta(\tau\, s) \\ \gamma_s(\tau) &= \gamma(\tau\, s) \\ A_s(\tau) &= A(\tau\, s)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (4.40)$$

de même $D_{1s}(\tau)$ et $D_{2s}(\tau)$; β_s et γ_s satisfont à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_s}{d\tau} + s\,A_s(\tau)\,\beta_s + s\,D_{1s}(\tau)\,\gamma_s = 0 \\ &\qquad\qquad \tau \in \left]\, 0, 1 \,\right[\\ &-\frac{d\gamma_s}{d\tau} + s\,A_s^*(\tau)\,\gamma_s - s\,D_{2s}(\tau)\,\beta_s = 0 \\ &\beta_s(0) = -P_0\,\gamma_s(0) \\ &\gamma_s(1) = h. \end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

Le système (4.41) est le système des équations d'Euler relatif au problème de contrôle suivant : Trouver $\theta = (v, w) \in H \times L^2(0, 1; E)$, contrôle du système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda}{d\tau} + s\,A_s(\tau)\,\lambda = s\,B_s(\tau)\,w \\ &\lambda(0) = v \end{aligned}\right\} \qquad (4.42)$$

avec un coût

$$J_s(\theta) = (P_0^{-1}\,v, v) + s\int_0^1 < Q_s^{-1}(\tau)\,w,\ w > d\tau + s\int_0^1 < R_s^{-1}(\tau)\,A_s(\tau)\,\lambda(\tau;\theta)\,,$$

$$A_s(\tau)\,\lambda(\tau;\theta) > dt + 2\,\big(h, \lambda(1;\theta)\big)\,; \qquad (4.43)$$

Notons que

$$\inf_{\theta \in (H \times L^2(0,\,1;\,E))} J_s(\theta) = \inf_{\theta_1 \in \mathscr{U}(0,\,s)} J_s^h(\theta_1)\,, \quad (f_1, f_2, \overline{\zeta} = 0). \qquad (4.44)$$

Considérons une suite $s_n \to s$. Désignons par $\lambda_s(\theta)$ l'état du système. Montrons d'abord que $\lambda_{sn}(\theta) \to \lambda_s(\theta)$ dans W (0, 1) faiblement (où $W(0,1) = \left\{ \lambda \mid \lambda \in L^2(0, 1; V),\ \frac{d\lambda}{d\tau} \in L^2(0, 1; V') \right\}$. On vérifie aisément, à l'aide de (4.42) que lorsque $s_n \to s$, $\lambda_{sn}(\theta)$ demeure dans un borné de W (0, 1). On peut donc extraire une sous suite s_μ telle que

$$\lambda_{s\mu} = \lambda_{s\mu}(\theta) \to \tilde{\lambda} \text{ dans W (0, 1) } \textit{faiblement}. \qquad (4.45)$$

Si ψ est fixé dans V, on a

$$< s_\mu\, A_{s\mu}(\tau)\,\lambda_{s\mu}(\tau)\,,\ \psi > = < \lambda_{s\mu}\,,\ s\,\mu\, A_{s\mu}^*(\tau)\,\psi >\,, \qquad (4.46)$$

et $s_\mu A^*_{s\mu}(\tau)\,\psi \to s\,A^*_s(\tau)\,\psi$ dans $L^2(0,1;V')$ fort. Donc
$\tau \to < s_\mu A_{s\mu}(\tau)\,\lambda_{s\mu}(\tau)\,,\,\psi >$ converge, par exemple dans $\mathscr{D}'(]0,1[)$ vers
$\tau \to < s\,A_s(\tau)\,\tilde{\lambda}(\tau)\,,\,\psi >$. Par conséquent, on a, par passage à la limite dans (4.42) appliqué avec $s = s\mu$

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} + s\,A_s(\tau)\,\tilde{\lambda} = s\,B_s(\tau)\,w$$

$$\tilde{\lambda}(0) = v,$$

soit $\tilde{\lambda} = \lambda_s(\theta)$. On a donc bien convergence faible de toute la suite $\lambda_{sn}(\theta) \to \lambda_s(\theta)$ dans $W(0,1)$. Montrons la convergence forte. Considérons

$$X_n = \int_0^1 s_n < A_{s_n}(\lambda_{s_n} - \lambda_s)\,,\,\lambda_{s_n} - \lambda_s > d\tau + \tfrac{1}{2}|\lambda_{s_n}(1) - \lambda_s(1)|^2 \qquad (4.47)$$

$$= -\int_0^1 s_n < A_{s_n}\lambda_s\,,\,\lambda_{s_n} - \lambda_s > d\tau - \int_0^1 s_n < A_{s_n}\lambda_{s_n}\,,\,\lambda_s > d\tau$$

$$+ \int_0^1 s_n < B_{s_n}(\tau)\,w\,,\,\lambda_{s_n} > d\tau + \tfrac{1}{2}|v|^2 - \tfrac{1}{2}|\lambda_{s_n}(1)|^2 + \tfrac{1}{2}|\lambda_{s_n}(1)|^2 + \tfrac{1}{2}|\lambda_s(1)|^2$$

$$- (\lambda_s(1)\,,\,\lambda_{s_n}(1))$$

ce qui tend vers

$$-\int_0^1 s < A_s\lambda_s\,,\,\lambda_s > d\tau + \int_0^1 s < B_s(\tau)\,w\,,\,\lambda_s > d\tau - \tfrac{1}{2}\{|\lambda_s(1)|^2 - |\lambda_s(0)|^2\}$$

$$= -\int_0^1 s < A_s\lambda_s\,,\,\lambda_s > d\tau + \int_0^1 s < B_s(\tau)\,w\,,\,\lambda_s > d\tau - \int_0^1 < \frac{d\lambda_s}{d\tau}\,,\,\lambda_s(\tau) > d\tau = 0.$$

Comme

$X_n \geqslant \alpha\,(\inf s_n)\,\|\lambda_{s_n} - \lambda_s\|^2_{L^2(0,1;V)}$, on a

$\lambda_s \to \lambda_s$ dans $L^2(0,1;V)$ fortement, et $\dfrac{d\lambda_{s_n}}{d\tau} = -s_n A_{s_n}(\tau)\lambda_{s_n} + s_n B_{s_n}(\tau)\,w \to \dfrac{d\lambda_s}{d\tau}$ dans $L^2(0,1;V')$. D'autre part, comme $\beta_s(1) = -P(s)\,h$, pour démontrer (4.37), il suffit de démontrer que

$\beta_{s_n}(1) \to \beta_s(1)$ dans H faiblement, lorsque $s_n \to s$. *(4.48)*

Soit θ_s le contrôle optimal du problème (4.42), (4.43). Nous avons

$J_{s_n}(\theta_{s_n}) \leqslant J_{s_n}(\theta_s) \to J_s(\theta_s)$, *(4.49)*

donc *lim sup* $J_{s_n}(\theta_n) \leqslant J_s(\theta_s)$.

On en déduit, comme pour le lemme 4.2, que θ_{s_n} demeure dans un borné de $H \times L^2(0,1;E)$. On extrait $\theta_{s_\mu} \to \tilde{\theta}$ dans $H \times L^2(0,1;E)$ faible. On remarque que $\lambda_{s_\mu}(\theta_{s_\mu}) \to \lambda_s(\tilde{\theta})$ dans $W(0,1)$ faible. On en déduit, comme au lemme 4.2, que $\tilde{\theta} = \theta_s$, et que

$\lambda_{s_n}(\theta_{s_n}) \to \lambda_s(\theta_s)$ dans $W(0,1)$ faiblement. *(4.50)*

Or

$\lambda_{s_n}(\theta_{s_n}) = \beta_{s_n}$, d'où il suit (4.48).

Lemme 4.5 : On a

$(P(s)\,h\,,\,h) > 0$, si $h \neq 0$. *(4.51)*

Démonstration : Le système (4.33) correspond au système des équations d'Euler du problème de contrôle suivant

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta = B(t)\,u(t) \\ &\beta(0) = v \end{aligned}\right\} \qquad (4.52)$$

$\theta = (u, v)$, et la fonction coût

$$J_s^h(\theta) = (P_0^{-1} v, v) + \int_0^s < Q^{-1}(t) u(t), u(t) > dt + \int_0^s dt < R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) \beta(t; \theta), \mathscr{C}(t) \beta(t; \theta) > + 2 (h, \beta(s; \theta)). \quad (4.53)$$

Soit $\hat{\theta}$ le contrôle optimal, on a

$$J_s^h(\hat{\theta}) = (h, \beta(s; \hat{\theta})) \leqslant 0; \quad (4.54)$$

soit $(P(s) h, h) \geqslant 0$. Si $(P(s) h, h) = 0$ avec $h \neq 0$, alors $\beta(s; \hat{\theta}) = 0$. Mais alors $\hat{\theta} = 0$, puisque 0 réalise le minimum de $J_s^h(\theta)$, et que ce minimum est atteint en un point unique. Mais $\hat{\theta} = 0 \Rightarrow \beta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0 \Rightarrow \gamma(s) = 0$ (par continuité), d'où $h = 0$, ce qui est impossible.

Lemme 4.6.

Il existe une constante C_1 telle que

$$|P(s) h| \leqslant C_1 |h| \quad , \forall h \in H, \forall s \in [0, T]. \quad (4.55)$$

Démonstration : La fonction coût $J_s^h(\theta)$ (4.53) peut s'écrire

$$J_s^h(\theta) = < S_s \theta, \theta > + 2 (h, T_s \theta), \quad (4.56)$$

où $S_s \in \mathscr{L}(H \times L^2(0, s; E); H \times L^2(0, s; E'))$ est défini par

$$< S_s \theta, \theta_1 > = (P_0^{-1} v, v_1) + \int_0^s < Q^{-1}(t) u(t), u_1(t) > dt \quad (4.57)$$

$$+ \int_0^s < R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) \beta(t; \theta), \mathscr{C}(t) \beta(t; \theta_1) > dt$$

$$T_s \theta = \beta(s; \theta); \quad (4.58)$$

$\hat{\theta}_S$ désignant le contrôle optimal, nous avons

$$< S_s \hat{\theta}_S, \theta_1 > + (h, T_s \theta_1) = 0 \quad \forall \theta_1, \quad (4.59)$$

et

$$J_s^h(\hat{\theta}_S) = (h, T_s \hat{\theta}_S) = - < S_s \hat{\theta}_S, \hat{\theta}_S >. \quad (4.60)$$

Il est aisé de voir, d'après les formules (4.57) et (4.58) que $\| T_s \|$ et $\| S_s \|$ sont bornés par des constantes, indépendantes de s. De même la constante de cœrcivité de S_s est aussi indépendante de s. Il en résulte alors

$$|\hat{\theta}_s|_{L^2(0, s; E) \times H} \leqslant C_2 |h| \quad ; C_2 \text{ indépendante de } s. \quad (4.61)$$

De (4.60) et (4.61) résulte alors

$$\inf_{\theta} J_s^h(\theta) \geqslant - C_2 |h|^2, \quad (4.62)$$

et comme $\inf_{\theta} J_s^h(\theta) = - (P(s) h, h)$, le résultat suit.

4.3 - Calcul d'identification formel.

Dans (4.5) et (4.6), on va remplacer formellement $y_T(t)$ par $r(t) - P(t) p_T(t)$, dériver *formellement*. On obtient

$$\frac{dr}{dt} + P(t) D_2(t) r(t) + P(t) f_2(t) + A(t) r(t) - f_1(t) \quad (4.63)$$

$$+ \left(- \frac{dP}{dt} - P(t) A^*(t) - P(t) D_2(t) P(t) - A(t) P(t) + D_1(t) \right) p_T(t) = 0,$$

$$r(0) - P(0) p_T(0) = \zeta - P_0 p_T(0). \quad (4.64)$$

Comme (4.63) et (4.64) ont lieu, $\forall p$ (ce point sera justifié) on a

$$\left. \begin{aligned} &\frac{dP}{dt} + A P + P A^* + P D_2 P = D_1 \\ &P(0) = P_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} + A\,r + P\,D_2\,r = f_1 - P\,f_2 \\ &r(0) = \overline{\zeta}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.66)$$

Donc, pour intégrer (4.5) ... (4.8), on résout d'abord (4.65) (équation du type Riccati), puis (4.66). On calcule ensuite p_T par

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t)\,p_T - D_2(t)\,(r(t) - P(t)\,p_T(t)) = f_2(t) \\ &p_T(T) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.67)$$

d'où

$$y_T(t) = r(t) - P(t)\,p_T(t). \qquad (4.68)$$

5 - Justification des calculs formels.

5.1 - Le cas de la dimension finie. Approximation.

Soit w_1 , w_2 ... w_m ... une base de V. Soit $y_m(t;\theta)$, $(\theta = (u, v))$, l'état approché d'ordre m défini par

$$\left.\begin{aligned} &<\frac{d}{dt}y_m(t;\theta), w_j> + a(t; y_m(t;\theta), w_j) = <f(t), w_j> + <B(t)\,u(t), w_j> \\ &y_m(0;\theta) = \sum_{i=1}^{m} (v, w_i)\,w_i. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Considérons la fonction coût

$$\mathcal{J}_m(\theta) = (P_0^{-1}(v - \overline{\zeta}), v - \overline{\zeta}) + \int_0^T <Q^{-1}(t)\,(u(t) - \overline{\xi}(t)), u(t) - \overline{\xi}(t)>\,dt$$
$$+ \int_0^T <R^{-1}(t)\,(z(t) - \mathscr{C}(t)\,y_m(t;\theta)), z(t) - \mathscr{C}(t)\,y_m(t;\theta)>\,dt. \qquad (5.2)$$

On cherche $inf\,\mathcal{J}_m(\theta)$, $\theta \in H \times L^2(0, T; E)$. Soit $\hat{\theta}$ la solution optimale. Ecrivons l'équation d'Euler attachée à la minimisation de $\mathcal{J}_m(\theta)$. On a, $\forall\ \theta_1 = (u_1, v_1)$

$$(P_0^{-1}(\hat{v} - \overline{\zeta}), v_1) + \int_0^T <Q^{-1}(t)\,(\hat{u}(t) - \overline{\xi}(t)), u_1(t)>\,dt$$
$$+ \int_0^T <R^{-1}(t)\,(\mathscr{C}(t)\,y_m(t;\hat{\theta}) - z(t)), \mathscr{C}(t)\,\tilde{y}_m(t;\theta_1)>\,dt = 0\ ; \qquad (5.3)$$

en désignant par $\tilde{y}_m(t;\theta_1)$ la solution de l'équation (5.1), correspondant à $\theta = \theta_1$ et $f = 0$. Introduisons le système adjoint

$$\left.\begin{aligned} &-<\frac{dp_m}{dt}(t;\hat{\theta}), w_j> + a^*(t; p_m(t;\hat{\theta}), w_j) = <R^{-1}(t)\,(\mathscr{C}(t)\,y_m(t;\hat{\theta}) \\ &- z(t)), \mathscr{C}(t)\,w_j> \\ &p_m(T;\hat{\theta}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

On voit alors aisément que (5.3) s'écrit

$$0 = (P_0^{-1}(\hat{v} - \overline{\zeta}), v_1) + (p_m(0, \hat{\theta}), v_1) + \int_0^T <Q^{-1}(t)\,(u(t) - \overline{\xi}(t)) + B^*(t)\,p_m(t;\hat{\theta}),$$
$$u_1(t)>\,dt, \qquad (5.5)$$

ce qui fournit la solution optimale

$$\hat{v} = \overline{\zeta} - P_0\,p_m(0;\hat{\theta}) \qquad (5.6)$$

$$\hat{u}(t) = \overline{\xi}(t) - Q(t)\,B^*(t)\,p_m(t;\hat{\theta}). \qquad (5.7)$$

On obtient ainsi le système, en posant $y_m^T = y(\hat{\theta})$ et $p_m^T = p(\hat{\theta})$

$$<\frac{dy_m^T}{dt}; w_j> + a(t;\ y_m^T, w_j) + <D_1(t)\,p_m^T, w_j> = <f_1(t), w_j>\ j = 1 \ldots m$$

$$-<\frac{dp_m^T}{dt}, w_j> + a^*(t; p_m^T, w_j) - <D_2(t)\, y_m^T, w_j> = <f_2(t), w_j>\ j = 1 \ldots m$$

$$p_m^T(T) = 0 \qquad (5.8)$$

$$y_m^T(0) = \overline{\zeta}_m - \sum_{i=1}^{m} w_i (P_0 p_m^T(0), w_i),$$

le contrôle optimal θ_m, étant défini par

$$\theta_m = \begin{cases} v_m = \overline{\zeta} - P_0\, p_m^T(0) \\ u_m(t) = \overline{\xi}(t) - Q(t)\, B^*(t)\, p_m^T(t). \end{cases} \qquad (5.9)$$

Nous avons alors

Théorème 5.1 : Hypothèses et notations du théorème 3.1. Soit $\mathscr{L}_m(\theta)$ la fonction coût (5.2), pour le système approché d'ordre m (5.1). Le contrôle optimal est donné par la résolution de (5.8), puis par (5.9). Alors on a

$$Inf\ \mathscr{L}_m(\theta) = \mathscr{L}_m(\theta_m) \underset{m \to +\infty}{\to} inf\ J(\zeta, \xi) \text{ (définie en 3.10)} \qquad (5.10)$$

$$\theta_m \underset{m \to +\infty}{\to} \hat{\theta} = (\hat{\zeta}, \hat{\xi}) \text{ (défini en (3.20) et (3.21)) dans } \mathscr{U} \textit{ fortement}\ (1) \qquad (5.11)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_m^T \underset{m \to +\infty}{\to} y^T \\ p_m^T \underset{m \to +\infty}{\to} p^T \end{array}\right\} \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \textit{ fortement.} \qquad (5.12)$$

Démonstration :

On sait (cf. [35]) que

$$y_m(t; \theta) \to y(t; \theta) \text{ dans } L^2(0, T; V) \textit{ fortement}; \ (y(t; \theta) \text{ solution de 3.3. avec } \theta = (\zeta, \xi)) \qquad (5.13)$$

Alors

$\mathscr{L}_m(\theta_m) \leqslant \mathscr{L}_m(\hat{\theta}) \to \mathscr{L}(\hat{\theta}) = J(\hat{\zeta}, \hat{\xi})$, donc

$$\limsup_{m \to +\infty} \mathscr{L}_m(\theta_m) \leqslant \mathscr{L}(\hat{\theta}). \qquad (5.14)$$

Comme $\mathscr{L}_m(\theta_m) \geqslant v \| \theta_m \|_u^2$, on peut extraire $\theta_\mu \to \tilde{\theta}$ dans $\mathscr{U}$ *faiblement.*

Alors

$$y_\mu(\theta_\mu) \underset{\mu \to +\infty}{\to} y(\tilde{\theta}) \text{ dans } L^2(0, T; V), \textit{faiblement}, \text{ de sorte que}$$

$$\liminf_{\mu \to +\infty} \mathscr{L}_\mu(\theta_\mu) \geqslant \mathscr{L}(\tilde{\theta}), \qquad (5.15)$$

donc $\tilde{\theta} = \hat{\theta}$

et l'on a

$$\mathscr{L}_m(\theta_m) \to \mathscr{L}(\hat{\theta}) \qquad (5.16)$$

$$\theta_m \to \hat{\theta} \textit{ faiblement dans } \mathscr{U} \qquad (5.17)$$

---

(1) $\mathscr{U} = H \times L^2(0, T; E)$.

$y_m^T \to y_T = y(\hat{\theta})$ *faiblement* dans $L^2(0, T; V)$ *(5.18)*

$p_m^T \to p_T = p(\hat{\theta})$ *faiblement* dans $L^2(0, T; V)$. *(5.19)*

Comme $\mathscr{L}_m$ est coercive, il est alors classique que cela suffit à entraîner la convergence forte.

5.2. Découplage de (5.8)

Soit V_m = espace engendré par $w_1, \ldots w_m$. On considère dans V_m le problème

$$< \frac{d\varphi_m}{dt}, w_j > + a(t; \varphi_m, w_j) + < D_1(t)\,\psi_m, w_j > = < f_1(t), w_j > j = 1 \ldots m$$

$$- < \frac{d\psi_m}{dt}, w_j > + a^*(t; \psi_m, w_j) - < D_2(t)\,\varphi_m, w_j > = < f_2(t), w_j > j = 1 \ldots m$$

$$\varphi_m(0) = \overline{\zeta}_m - \sum_{i=1}^{m} w_i (P_0\,\psi_m(0), w_i) \qquad (5.20)$$

$\psi_m(s) = h_m \in V_m$.

On a alors

$$\varphi_m(s) = r_m(s) - P_m(s)\,h_m \qquad (5.21)$$

$$P_m(s) \in \mathscr{L}(V_m; V_m) \qquad (5.22)$$

$$r_m(s) \in V_m \qquad (5.23)$$

$$P_m^*(s) = P_m(s) \qquad (5.24)$$

et on a l'identité

$$y_m^T(t) = r_m(t) - P_m(t)\,p_m^T(t). \qquad (5.25)$$

Un calcul formel analogue à 5.1 donne alors

$$\left.\begin{aligned} &< \frac{dr_m}{dt}, w_j > + a(t; r_m, w_j) + < D_2(t)\,r_m, P_m w_j > = < f_1, w_j > - < f_2, P_m w_j > \\ &r_m(0) = y_{0m} \end{aligned}\right\} \qquad (5.26)$$

$$\left.\begin{aligned} &< \frac{dP_m}{dt} w_i, w_j > + a(t; P_m w_i, w_j) + a^*(t; w_i, P_m w_j) + < D_2(t)\,P_m w_i, P_m w_j > \\ &= < D_1(t)\,w_i, w_j > \\ &(P_m(0)\,w_i, w_j) = (P_0 w_i, w_j) \end{aligned}\right\} \qquad (5.27)$$

Réciproquement soit P_m la solution locale du système d'équations de Riccati (5.27), *i.e.* P_m solution dans $]0, s[$, s assez petit, soit ensuite r_m la solution dans le même intervalle de (5.26). Si on définit

$$y_m^T(s) = r_m(s) - P_m(s)\,p_m^T(s), \qquad (5.28)$$

on a alors une situation analogue à celle du lemme 4.6. Donc il existe C_1 telle que

$$|P_m(s)\,h_m| \leqslant C_1 |h_m| \quad \forall\, h_m \in V_m,\ C_1 \text{ indépendante de } s \text{ et } m. \qquad (5.29)$$

Donc la solution de (5.27) existe globalement dans $]0, T[$ et r_m défini par (5.26) existe aussi dans $]0, T[$. Nous avons ainsi.

Théorème 5.2 : $P_m(t)$ et $r_m(t)$ sont une fois continûment différentiables de $[0, T] \to \mathcal{L}(V_m; V_m)$ et V_m respectivement ; P_m est la solution du système de Riccati (5.27) et r_m est la solution de (5.26). On a, en outre, (5.29).

5.3. Passage à la limite

Appliquons le théorème 5.1 à $\{\varphi_m, \psi_m\}$. Pour $h_m \to h$ *fortement* dans H, nous avons $\varphi_m \to \varphi$, $\psi_m \to \psi$ dans $L^2(0, s; V)$ *fortement* (φ, ψ solution de (4.7)). Le système (5.20) permet de voir, en s'intéressant à la deuxième et à la quatrième équation que $|\ \psi_m(0)\ |$ demeure dans un borné de H, puis en s'intéressant à la première et à la troisième équation que $|\ \varphi_m(s)\ |$ borné. On peut donc supposer que $\psi_\mu(0) \to \chi$ dans H faiblement. Or l'intégration de la deuxième et de la quatrième équation fournit

$$(-h_m, w_j) + (\psi_\mu(0), w_j) + \int_0^s a^*(t; \psi_\mu, w_j)\, dt - \int_0^s < D_2(t)\, \varphi_\mu, w_j > dt = \int_0^s < f_2(t), w_j > dt, \tag{5.30}$$

d'où

$$(\chi, w_j) = (\psi(0), w_j)$$

soit

$$\chi = \psi(0),$$

et toute la suite $\psi_m(0) \to \psi(0)$ dans H faiblement. Il en résulte que $\varphi_m(0) \to \varphi(0)$ d'après la troisième équation. Par ailleurs, comme $|\ \varphi_m(s)\ |$ est borné, il existe une sous suite $\varphi_\mu(s)$ faiblement convergente vers $\tilde{\chi}$. On voit, en intégrant la première équation (5.20) que $\tilde{\chi} = \varphi(s)$. Donc $\varphi_m(s) = r_m(s) - P_m(s)\, h_m \to \varphi(s) = r(s) - P(s)\, h$, dans H *faiblement*, $\forall\ s$. Il en résulte que $(P_m(t)\, h_m, \bar{h}) \underset{m \to +\infty}{\to} (P(t)\, h, \bar{h})$ dans $L^\infty(0, T)$, dual faible de $L^1(0, T)$ (d'après le théorème de Lebesgue), d'où

Théorème 5.3. Lorsque $m \to +\infty$, on a

$$\left.\begin{array}{l} (P_m h_m, \bar{h}) \to (P h, \bar{h}) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ dual faible de } L^1(0, T), \\ \forall\ \bar{h} \in H,\ h \in H \text{ et } h_m \in V_m, \text{ convergeant fortement vers } h, \text{ dans H,} \end{array}\right\} \tag{5.31}$$

$$r_m \to r \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faiblement.} \tag{5.32}$$

5.4. Equation de Riccati.

Il s'agit maintenant de passer à la limite, dans les équations (5.26), (5.27). Nous allons supposer

$$\mathscr{C}(t) \in \mathcal{L}(H; F) \text{ (et non plus seulement } \in \mathcal{L}(V; F)), \tag{5.33}$$

l'injection de V dans H est compacte. (5.34)

Lemme 5.1 : Sous les hypothèses (5.33) et (5.34), on a

$$r \in W(0, T) \text{ (\textit{i.e.} } r \in L^2(0, T; V), \frac{dr}{dt} \in L^2(0, T; V')). \tag{5.35}$$

Démonstration :

On déduit de (5.26)

$$< \frac{dr_m}{dt}, r_m > + a(t; r_m, r_m) = -(D_2 r_m, P_m r_m) + < f_1, r_m > - (f_2, P_m r_m) \tag{5.36}$$

$r_m(0) = \overline{\zeta}_m$

En intégrant de 0 à s, on déduit

$$\frac{1}{2}|r_m(s)|^2 - \frac{1}{2}|\overline{\zeta}_m|^2 + \alpha\int_0^s \|r_m(\sigma)\|_V^2\, d\sigma \leqslant c\int_0^s (|r_m|^2 + \|r_m\|_V \|f_1\|_{V'} + |f_2\|r_m|)\, d\sigma,$$

d'où

$$|r_m(s)|^2 + \int_0^s \|r_m(\sigma)\|_V^2\, d\sigma \leqslant c_1\int_0^s |r_m(\sigma)|^2\, d\sigma + c_2\Big(\int_0^s d\sigma\,(\|f_1\|_{V'}^2 + |f_2|_H^2) + |\overline{\zeta}|^2\Big). \tag{5.37}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on a alors

$$\int_0^T \|r_m(\sigma)\|_V^2\, d\sigma \leqslant \text{Cte}. \tag{5.38}$$

On déduit, d'autre part, de (5.26)

$$\left.\begin{aligned} &<\frac{dr_m}{dt}, w_j> = ((\rho_m(t), w_j))_V \\ &r_m(0) = \overline{\zeta}_m, \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

où ρ_m est borné dans $L^2(0, T, V)$. En prolongeant ρ_m par 0 en dehors des $(0, T)$ on peut écrire (5.39) sous la forme

$$<\frac{dr_m}{dt}, w_j> = ((\rho_m(t), w_j))_V + \delta(t)\,(\overline{\zeta}_m, w_j)_H, \tag{5.40}$$

relation vraie sur $(-\infty, +\infty)$. Par transformation de Fourier en t, on en déduit ($\hat{\varphi}$ = transformée de Fourier de φ),

$$i\tau(\hat{r}_m(\tau), w_j) = ((\hat{\rho}_m(\tau), w_j))_V + (\overline{\zeta}_m, w_j)_H, \tag{5.41}$$

d'où

$$i\tau|\hat{r}_m(\tau)|^2 = ((\hat{\rho}_m(\tau), \hat{r}_m(\tau))) + ((J_V^{-1}\overline{\zeta}_m, \hat{r}_m(\tau)))_V \text{ (1)}, \tag{5.42}$$

soit

$$|\tau||\hat{r}_m(\tau)|^2 \leqslant (\|\hat{\rho}_m(\tau)\| + \|J_V^{-1}\overline{\zeta}_m\|)\|\hat{r}_m(\tau)\|. \tag{5.43}$$

On en déduit que pour χ quelconque $> \frac{1}{2}$ la fonction

$\tau \to |\tau|\,(1 + |\tau|^{\chi})^{-1}|\hat{r}_m(\tau)|^2$ est sommable et l'intégrale bornée, donc pour $\gamma < \frac{1}{2}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}|\hat{r}_m(\tau)|^2\, d\tau \leqslant \text{Cte}. \tag{5.44}$$

On introduit maintenant $\mathscr{H}_\gamma(-\infty, +\infty; V; H)$, espace des $y \in L^2(-\infty, +\infty; V)$ tels que $|\tau|^\gamma \hat{y}(\tau) \in L^2(-\infty, +\infty; H)$, muni de la norme (hilbertienne)

$$\|y\|_{\mathscr{H}_\gamma(-\infty, +\infty; V, H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|y\|(t)^2\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}|\hat{y}(\tau)|^2\, d\tau\right)^{1/2},$$

(1) Rappelons que J_V désigne l'isomorphisme de V dans V'.

et soit $\mathscr{H}_\gamma(0, T; V, H)$ l'espace des restrictions à $(0, T)$ des éléments de $\mathscr{H}_\gamma$ $(-\infty, +\infty; V, H)$ muni de la norme

$$\| y \|_{\mathscr{H}_\gamma(0, T; V, H)} = \inf \| z \|_{\mathscr{H}_\gamma(-\infty, +\infty; V, H)} \text{ t.q. } z = y \text{ p.p. } (0, T).$$

Alors r_m défini par (5.39), demeure, grâce à (5.38) et (5.44) dans un borné de $\mathscr{H}_\gamma(0, T; V, H)$. Grâce à un théorème de compacité dû à LIONS [34], r_m demeure dans un compact de $L^2(0, T; H)$. On peut donc extraire une sous suite r_μ qui converge vers r dans $L^2(0, T; H)$ *fortement*. On a alors

$$(D_2 r_\mu, P_\mu w_j) \underset{\mu \to +\infty}{\to} (D_2 r, P w_j) \text{ dans } \mathscr{D}'(]0, T[). \tag{5.45}$$

On peut alors passer à la limite dans (5.26). Il vient

$$\left.\begin{aligned} &< \frac{dr}{dt}, w_j > + a(t; r, w_j) + (D_2 r, P w_j) = < f_1, w_j > - (f_2, P w_j) \\ &= r(0) = \overline{\zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

ce qui démontre (4.66) et entraîne que $\frac{dr}{dt} \in L^2(0, T; V')$.

Théorème 5.4. y_T et p_T désignant la solution de (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), on a

$$y_T(t) = r(t) - P(t) p_T(t), \tag{5.47}$$

où P et r ont les propriétés suivantes

$$\left.\begin{aligned} &P(t) \in \mathscr{L}(H; H) > 0, \text{ autoadjoint. Si } \varphi \in W(0, T) \text{ avec } -\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi \\ &\in L^2(0, T; H), \text{ alors } P(t)\varphi(t) \in W(0, T); \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

$$\left.\begin{aligned} &P \text{ satisfait à (4.65) au sens de} \\ &\frac{d}{dt}(P\varphi) + P\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi\right) + P D_2 P \varphi + A P \varphi = D_1 \varphi \\ &P(0) = P_0; \end{aligned}\right\} \tag{5.49}$$

r est la solution dans $W(0, T)$ de (4.66).
P et r sont définis de façon unique.

Démonstration :
Soit φ comme en (5.48). Définissons y_φ comme la solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_\varphi}{dt} + A(t) y_\varphi + D_1(t)\varphi = f_1 \\ &y_\varphi(0) = \overline{\zeta} - P_0 \varphi(0), \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

et prenons $f_{2\varphi} = -\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi - D_2 y_\varphi$, $h = \varphi(T)$.

Alors (y_φ, φ) sont solutions de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_\varphi}{dt} + A(t) y_\varphi + D_1(t)\varphi = f_1 \\ &-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi - D_2 y_\varphi = f_{2\varphi} \\ &y_\varphi(0) = \overline{\zeta} - P_0 \varphi(0) \\ &\varphi(T) = h. \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

Il existe donc r_φ solution (4.66), $r_\varphi \in W(0, T)$, $r_\varphi(0) = \overline{\zeta}$, tel que

$$y_\varphi(t) = r_\varphi(t) - P(t)\varphi(t), \tag{5.52}$$

donc P vérifie (5.48). Nous avons maintenant

$$\frac{d}{dt} P\varphi = \frac{dr_\varphi}{dt} - \frac{dy_\varphi}{dt}, \tag{5.53}$$

or $$\frac{dr_\varphi}{dt} = f_1 - P f_{2\varphi} - A r_\varphi - P D_2 r_\varphi$$

$$\frac{dy_\varphi}{dt} = f_1 - A y_\varphi - D_1 \varphi = f_1 - A r_\varphi + A P \varphi - D_1 \varphi ,$$

et de (5.53) on déduit alors la première équation (5.49). Par ailleurs (5.52) donne

$$\overline{\zeta} - P_0 \varphi(0) = \overline{\zeta} - P(0)\varphi(0) , \tag{5.54}$$

d'où la deuxième équation (5.49). Réciproquement, soit P et r satisfaisant à (5.49) et (4.66), alors on obtient p par

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t) p_T + D_2 P p_T = D_2 r + f_2 \\ &p_T(T) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

et $\quad y_T = r - P p_T$;

y_T et p_T sont alors solutions du problème de minimisation de la fonctionnelle $J(\zeta, \xi)$. Il ne peut donc y avoir deux solutions différentes de l'équation de Riccati.

Corollaire 5.1 : L'estimateur optimal $\hat{y}_T$ défini en (3.12) est donné par

$$\hat{y}_T = r(T). \tag{5.56}$$

Démonstration : résulte immédiatement de $\hat{y}_T = y_T(T), p_T(T) = 0$ et de $y_T(t) = r(t) - P(t) p_T(t)$ ■

Si maintenant, on prolonge l'observation z au-delà de T, et qu'on s'intéresse à la loi d'évolution de l'estimateur optimal, c'est-à-dire à la fonction $T \to \hat{y}_T$, il est clair que cette loi est fournie par l'équation (4.66) prolongée, au-delà de T. Par conséquent (4.66) définit un algorithme *récurrent*, qui fournit l'estimateur optimal de l'état *présent* du système (Filtrage).

6. Exemple de filtrage parabolique.

Les notations non redéfinies sont celles de 3.3. Nous prenons $E = H$, $F = H$, $V = H_0^1(\Omega)$ $B(t)$ = identité (de $\mathscr{L}(H; H)$), $\mathscr{C}(t)$ = injection de V dans H, $f = 0$. Puis $P_0 = \sigma_3^2 I$, $Q(t) = \sigma_1^2 I$, $R(t) = \sigma_2^2 I$. On a alors $D_1(t) = \sigma_1^2 I$, $D_2(t) = \frac{1}{\sigma_3^2} I$. L'équation (5.49) s'écrit alors

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(P\varphi) + P\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi\right) + \frac{P^2\varphi}{\sigma_3^2} + A P\varphi = \sigma_1^2 \varphi \\ &P(0) = \sigma_3^2 I. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

D'après le théorème des noyaux de L. SCHWARTZ [53] [54], on peut représenter $P(t)$ sous la forme

$$P(t)\varphi = \int_\Omega P(x, \xi, t)\varphi(\xi)\, d\xi \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{6.2}$$

où

P (x, ξ, t) = noyau de P (t) = distribution sur $\Omega_x \times \Omega_t$, définie de façon unique par P (t). On a alors

Théorème 6.1 : Hypothèses et notations de 5.4 et 6 et les coefficients de A assez réguliers. Le noyau P (x, ξ, t) de l'opérateur P (t) caractérisé au théorème 5.4 vérifie l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial t}(x, \xi, t) + (A_x + A_\xi) P(x, \xi, t) + \dfrac{1}{\sigma_3^2} \displaystyle\int_\Omega P(x, \xi_1, t) P(\xi_1, \xi, t)\, d\xi_1 \\ = \sigma_1^2\, \delta(x - \xi) \end{array}\right\} \quad (6.3)$$

$$P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t) \quad (6.4)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x, \xi, t) = 0, \text{ si } x \in \Gamma, \xi \in \Omega \text{ (et donc P } (x, \xi, t) = 0 \quad \text{si } x \in \Omega, \\ \xi \in \Gamma \text{ d'après (6.4))} \end{array}\right\} \quad (6.5)$$

$$P(x, \xi, 0) = \sigma_3^2\, \delta(x - \xi). \quad (6.6)$$

Démonstration :

On a $V = H_0^1(\Omega)$ et si les coefficients de $A\left(t, x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ sont assez réguliers [1], P $(t) \in \mathscr{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$ (cf. J.-L. LIONS [37]). La condition (6.4) résulte de ce que P $(t)^*$ = P (t) et (6.6) résulte de P $(0) = \sigma_3^2$ I (en notant que $\delta(x - \xi)$ est le noyau de l'opérateur identité). La propriété (6.5) résulte de ce que, si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ par exemple, alors P $(t)\, \varphi \in L^2(0, T; V)$, donc P $(t)\, \varphi = 0$ sur $\sum = \Gamma \times]0, T[$. On note ensuite que (toujours si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$)

$$PA^*\, \varphi(x) = \int_\Omega P(x, \xi, t)\, A_\xi^*(t)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int_\Omega A_\xi\, P(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (6.7)$$

de sorte que le noyau de PA^* est A_ξ P. On déduit alors (6.3) de

$$\frac{dP}{dt}\varphi + PA^*\, \varphi + AP\, \varphi + \frac{P^2 \varphi}{\sigma_3^2} = \sigma_1^2\, \varphi, \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad (6.8)$$

l'équation (6.8) provenant de l'application de (6.1).

Remarque 6.1 : On peut envisager le cas où l'entrée stochastique du système se trouve sur la surface. Pour pouvoir appliquer le théorème des noyaux, il faut supposer les coefficients de l'opérateur assez réguliers (cf. LIONS [35]).

Remarque 6.2 : Le cas où l'observation est sur la surface, ne reste pas dans le cadre de la théorie générale, car $\mathscr{C}(t) = \gamma$ et l'hypothèse (5.33) n'est pas vérifiée. Cependant, en supposant les coefficients de l'opérateur assez réguliers, on peut faire une étude *directe* de la question, en s'inspirant des méthodes de J.-L. LIONS [35].

7. Systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique ou « bien posé au sens de Petrowsky ».

7.1 Hypothèses - Notations.

Les notations non redéfinies sont celles de 2.1 ou 3.1. On se donne un opérateur $A \in \mathscr{L}(V; V')$. On pose

$$a(\varphi, \psi) = \langle A\, \varphi, \psi \rangle\ , \forall\, \varphi, \psi \in V. \quad (7.1)$$

(1) par exemple deux fois continûment différientiables.

On suppose A coercif, *i.e.*

$$a(\varphi, \varphi) \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2 \tag{7.2}$$

et

$$a(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi). \tag{7.3}$$

On considère le problème d'évolution (du second ordre en t)

$$\frac{d^2 y}{dt} + A y = f + B(t)\, \xi(t) \qquad t \in]0, T[\tag{7.4}$$

$$y(0) = \zeta_0 \qquad , \zeta_0 \in V \tag{7.5}$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = \zeta_1 \qquad , \zeta_1 \in H \tag{7.6}$$

où

$$B(t) \in \mathscr{L}(E; H) \qquad , B \equiv B(t) \in \mathscr{L}\left(L^2(0, T; E); L^2(0, T; H)\right) \tag{7.7}$$

$$f \in L^2(0, T; H). \tag{7.8}$$

On sait (cf. J.-L. LIONS [34]) que les équations (7.4), (7.5), (7.6) définissent un y et un seul appartenant à $L^2(0, T; V)$. De plus l'application u définie par

$$\{ \xi(t), \zeta_0, \zeta_1 \} \xrightarrow{u} \left\{ y, \frac{dy}{dt} \right\} \tag{7.9}$$

est affine continue de $L^2(0, T; E) \times V \times H \to L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; H)$. Il y a, en fait, davantage (cf. LIONS-MAGENES [37]) :

l'application δ_t, $t \in [0, T]$ fixé quelconque, définie par

$$\left.\begin{array}{l} \{ \xi, \zeta_0, \zeta_1 \} \xrightarrow{\delta_t} \left\{ y(t), \dfrac{dy}{dt} \right\} \\ \text{est affine continue de } L^2(0, T; E) \times V \times H \to V \times H. \end{array}\right\} \tag{7.10}$$

Au modèle d'évolution (7.4), (7.5), (7.6) nous associons, comme en 2.1 ou 3.1, un modèle stochastique, de la manière suivante.

Nous nous donnons une *observation* sur le système, définie par

$$z(t) = C(t)\, y(t) + \eta(t) \tag{7.11}$$

où

$$\mathscr{C}(t) \in \mathscr{L}(H; F)\ , \forall\, t \in]0, T[;\ C \equiv C(t) \in \mathscr{L}\left(L^2(0, T; H); L^2(0, T; F)\right). \tag{7.12}$$

L'entrée du système est $(\xi\ ,\ \zeta_0\ ,\ \zeta_1)$ et l'erreur d'observation est η. L'hypothèse sur le caractère probabiliste de l'entrée et de l'erreur est alors la suivante :

L'espace $V \times H \times L^2(0, T; E) \times L^2(0, T; F)$ est muni d'une mesure cylindrique μ d'espérance mathématique $\left(\overline{\zeta_0}\ ,\ \overline{\zeta_1}\ ,\ \overline{\xi}(t)\ ,\ 0\right)$ et d'opérateur de covariance, défini par la matrice d'opérateurs

$$\begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(t) \end{pmatrix} \quad \text{où}$$

- $P_0 \in \mathscr{L}(V'; V)$, autoadjoint, défini positif et *inversible*
- $P_1 \in \mathscr{L}(H; H)$, autoadjoint, défini positif et *inversible*
- $Q(t) \in \mathscr{L}(E'; E)$, $\forall\, t \in [0, T]$, autoadjoint, défini positif et *inversible*
- $R(t) \in \mathscr{L}(F'; F)$, $\forall\, t \in [0, T]$, autoadjoint, défini positif et *inversible.*

(7.13)

La fonctionnelle des moindres carrés est alors

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(\theta) = J(\xi, \zeta_0, \zeta_1) = \langle P_0^{-1}(\zeta_0 - \overline{\zeta_0}), \zeta_0 - \overline{\zeta_0} \rangle \\ &+ \langle P_1^{-1}(\zeta_1 - \overline{\zeta_1}), \zeta_1 - \overline{\zeta_1} \rangle + \int_0^T \langle R^{-1}(t)\,(z(t) - C(t)\,y(t;\theta)),\ z(t) \\ &- C(t)\,y(t;\theta) \rangle\, dt + \int_0^T \langle Q^{-1}(t)\,(\xi(t) - \overline{\xi}(t)), \xi(t) - \overline{\xi}(t) \rangle\, dt \quad ; \\ &\text{où } \theta = (\xi(t), \zeta_0, \zeta_1) \end{aligned}$$

(7.14)

Il s'agit de minimiser $\mathscr{L}(\theta)$ sur $V \times H \times L^2(0, T; E) \times L^2(0, T; F)$.

7.2 Estimateur optimal.

La fonctionnelle $\mathscr{L}(\theta)$ possède un minimum unique, en $\hat{\theta} = (\hat{\xi}, \hat{\zeta}_0, \hat{\zeta}_1)$. Ce qui nous intéresse, c'est de calculer $\hat{y}_T = y(T; \hat{\theta})$, estimateur optimal de l'état présent du système (T représente l'état présent, *i. e. instant final d'observation).* Nous avons alors

Théorème 7.1 : Hypothèses et notations de 7.1. Le système, en y_T, p_T,

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 y_T}{dt^2} + A\,y_T + B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,p_T = B(t)\,\overline{\xi}(t) + f(t) \\ &\frac{d^2 p_T}{dt^2} + A\,p_T - C^*(t)\,R^{-1}(t)\,C(t)\,y_T = -\,C^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ &y_T(0) - P_0\,p_T'(0) = \overline{\zeta_0} \\ &y_T'(0) + P_1\,p_T(0) = \overline{\zeta_1} \\ &p_T(0) = 0 \\ &p_T'(0) = 0 \end{aligned}$$

(7.15)

possède une solution unique. L'estimateur optimal $\hat{y}_T$ est alors défini par

$$\hat{y}_T = y_T(T). \qquad (7.15)$$

Démonstration : Soit $\overline{y}$ la solution de

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \overline{y}}{dt^2} + A\,\overline{y} = f \\ &\overline{y}(0) = 0 \\ &\overline{y}'(0) = 0 \end{aligned}$$

(7.16)

et $\tilde{y}(\theta)$ la solution de

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + A \tilde{y} = B(t) \xi(t)$$

$$\tilde{y}(0) = \zeta_0 \qquad (7.17)$$

$$\tilde{y}'(0) = \zeta_1 .$$

Alors la fonctionnelle $\mathscr{L}(\theta)$ s'écrit

$$\mathscr{L}(\theta) = < P_0^{-1} \zeta_0 , \zeta_0 > + (P_1^{-1} \zeta_1 , \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1}(t) \xi(t), \xi(t) > dt$$
$$+ \int_0^T < R^{-1}(t) C(t) \tilde{y}(\theta) , C(t) \tilde{y}(\theta) > dt - 2 < P_0^{-1} \overline{\zeta}_0 , \zeta_0 >$$
$$- 2 (P_1^{-1} \overline{\zeta}_1 , \zeta_1) - 2 \int_0^T < Q^{-1}(t) \overline{\xi}(t), \xi(t) > dt - 2 \int_0^T < R^{-1}(t) \left(z(t) - C(t) \overline{y}\right),$$
$$C(t) \tilde{y}(\theta) > dt + \text{Cte}.$$

L'optimum $\hat{\theta}$ est alors solution de l'équation d'Euler

$$< P_0^{-1} (\hat{\zeta}_0 - \overline{\zeta}_0) , \zeta_0 > + \left(P_1^{-1} (\hat{\zeta}_1 - \overline{\zeta}_1) , \zeta_1\right) + \int_0^T < Q^{-1}(t) \left(\hat{\xi}(t) - \overline{\xi}(t)\right) , \xi(t) > dt$$
$$+ \int_0^T < R^{-1}(t) \left(C(t) y(t; \hat{\theta}) - z(t)\right) , C(t) \tilde{y}(t; \theta) > dt = 0 , \qquad (7.19)$$

$\forall\, \theta$ appartenant à $L^2(0, T; E) \times V \times H$.

On introduit alors $p_T \in W(0, T)$, solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 p_T}{dt^2} + A p_T = C^*(t) R^{-1}(t) \left(C(t) y(t; \hat{\theta}) - z(t)\right) \\ &p_T(T) = 0 \\ &\frac{d p_T}{dt}(T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.20)$$

Nous utiliserons la formule d'intégration par parties suivante (cf. [37]) : si $\varphi, \psi \in L^2(0, T; V)$ et sont telles que $\varphi' , \psi' \in L^2(0, T; H)$ et $\varphi'' , \psi'' \in L^2(0, T; V')$, alors

$$\int_0^T < \varphi , \frac{d^2 \psi}{dt^2} > dt = \left(\psi'(T) , \varphi(T)\right) - \left(\psi'(0) , \varphi(0)\right)$$
$$- \left(\psi(T) , \varphi'(T)\right) + \left(\psi(0) , \varphi'(0)\right) + \int_0^T < \psi , \frac{d^2 \varphi}{dt^2} > dt. \qquad (7.21)$$

Grâce à (7.20), on transforme alors (7.19) en

$$< P_0^{-1} (\hat{\zeta}_0 - \overline{\zeta}_0) - p_T'(0) , \zeta_0 > + \left(P_1^{-1} (\hat{\zeta}_1 - \overline{\zeta}_1) + p_T(0) , \zeta_1\right)$$
$$+ \int_0^T < Q^{-1}(t) \left(\hat{\xi}(t) - \overline{\xi}(t)\right) + B^*(t) p_T(t) , \xi(t) > dt = 0, \qquad (7.22)$$

d'où

$$\hat{\xi}(t) = \overline{\xi}(t) - Q(t) B^*(t) p_T(t) \qquad (7.23)$$

$$\hat{\zeta}_0 = \overline{\zeta}_0 + P_0 p_T'(0) \qquad (7.24)$$

$$\hat{\zeta}_1 = \overline{\zeta}_1 - P_1 p_T(0) , \qquad (7.25)$$

d'où il résulte (7.15).

7.3 - Nouvelle définition de l'estimateur optimal.

7.3.1 - Transformation du système originel.

Posons

$$\mathscr{H} = V \times H \qquad (7.26)$$

si $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi} \in \mathscr{H}$, $\vec{\varphi} = \{ \varphi_0 , \varphi_1 \}$, $\vec{\psi} = \{ \psi_0 , \psi_1 \}$. On définit le produit scalaire sur $\mathscr{H}$ par

$$[\vec{\varphi} , \vec{\psi}] = a (\varphi_0 , \psi_0) + (\varphi_1 , \psi_1). \tag{7.27}$$

On introduit ensuite

$$\mathscr{V} = \mathrm{V} \times \mathrm{V}. \tag{7.28}$$

On *identifie* $\mathscr{H}$ *à son dual.* Soit $\mathscr{V}'$ le dual de $\mathscr{V}$. Alors

$$\mathscr{V} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{V}' \tag{7.29}$$

$$\mathscr{V}' = \mathrm{V} \times \mathrm{V}'. \tag{7.30}$$

Soit $\mathscr{A}$ l'opérateur $\in \mathscr{L} (\mathscr{V}; \mathscr{V}')$ défini par

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

$\mathscr{A}$ appartient aussi à $\mathscr{L} (\mathscr{H}; \mathrm{H} \times \mathrm{V}')$. (7.32)

Soit $\mathscr{B} (t) \in \mathscr{L} (\mathrm{E}; \mathscr{H})$ défini par

$$\mathscr{B} (t) \xi (t) = \{ 0, \mathrm{B} (t) \xi (t) \}. \tag{7.33}$$

Le système (7.4) est alors équivalent à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{y}}{dt} + \mathscr{A} \vec{y} = \mathscr{B} (t) \xi (t) + \vec{f} \\ &\vec{y} (0) = \vec{\zeta} \in \mathscr{H} , \end{aligned}\right\} \tag{7.34}$$

où

$$\vec{f} = \{ 0, f \} ; \vec{\zeta} = \{ \zeta_0 , \zeta_1 \} . \tag{7.35}$$

Cherchons maintenant comment se transforme la mesure cylindrique μ originelle sur $\mathrm{V} \times \mathrm{H} \times \mathrm{L}^2 (0, \mathrm{T}; \mathrm{E}) \times \mathrm{L}^2 (0, \mathrm{T}; \mathrm{F})$, par l'application de $\mathrm{V} \times \mathrm{H} \times \mathrm{L}^2 (0, \mathrm{T}; \mathrm{E}) \times \mathrm{L}^2 (0, \mathrm{T}; \mathrm{F})$ dans $\mathscr{H} \times \mathrm{L}^2 (0, \mathrm{T}; \mathrm{E}) \times \mathrm{L}^2 (0, \mathrm{T}; \mathrm{F})$ définie par

$$\{ \zeta_0 , \zeta_1 , \xi (t) , \eta (t) \} \to \{ \vec{\zeta} , \xi (t) , \eta (t) \} . \tag{7.36}$$

Il est clair que les seules questions qui se posent concernent ζ_0. Au numéro 7.1, on se plaçait dans l'espace V, avec la dualité $< \mathrm{V}, \mathrm{V}' >$ et on considérait sur cet espace une mesure cylindrique μ_1, d'espérance mathématique $\overline{\zeta_0}$ et d'opérateur de covariance $\mathrm{P}_0 \in \mathscr{L} (\mathrm{V}'; \mathrm{V})$. Ici, nous considérons le même espace V, mais muni d'un produit scalaire différent, $a (\varphi , \psi)$ et nous identifions l'espace ainsi défini à son dual. Désignons par V_1 l'espace V muni du produit scalaire originel, et par V_2 l'espace V muni du produit scalaire $a (\varphi , \psi)$. Tout élément φ de V sera désigné par φ_1 ou φ_2, selon qu'on le considère dans V_1 ou V_2. Nous sommes partis d'une mesure cylindrique μ_1 sur V_1 , de caractéristiques $\overline{\zeta_{01}}$ (i. e. $\overline{\zeta_0}$, considéré comme élément de V_1) et $\mathrm{P}_0 \in \mathscr{L} (\mathrm{V}'_1 ; \mathrm{V}_1)$, $(\mathrm{V}'_1 \equiv \mathrm{V}')$. Soit u l'application $\in \mathscr{L} (\mathrm{V}_1 ; \mathrm{V}_2)$ qui à tout élément φ_1 associe son *homologue* φ_2. Nous devons donc définir les caractéristiques de la mesure cylindrique $u \mu_1 = \mu_2$ sur V_2. D'après le n° 2.4 du chapitre I, nous savons que μ_2 a pour espérance mathématique $u \overline{\zeta_{01}} = \overline{\zeta_{02}}$ ($\equiv \overline{\zeta_0}$ dans V_2) et pour opérateur de covariance $u \mathrm{P}_0 u^* \in \mathscr{L} (\mathrm{V}_2 ; \mathrm{V}_2)$. Or nous avons

$$(\varphi_2 , \psi_2)_{\mathrm{V}_2} = (\varphi_2 , u \psi_1)_{\mathrm{V}_2} , \forall \varphi , \psi \in \mathrm{V} , \tag{7.37}$$

d'où

$$< u^* \varphi_2 , \psi_1 > = < u^* u \varphi_1 , \psi_1 > , \tag{7.38}$$

soit

$$a (\varphi , \psi) = < u^* u \varphi , \psi > , \tag{7.39}$$

donc

$$u^* u = \mathrm{A}. \tag{7.40}$$

Remarquons que, si $\varphi \in \mathrm{V}$ (et φ_1 , φ_2 désignant les deux versions de φ), on a

$$u \mathrm{P}_0 u^* \varphi_2 = u \mathrm{P}_0 \mathrm{A} \varphi_1 = (\mathrm{P}_0 \mathrm{A} \varphi_1)_2 , \tag{7.41}$$

ce qui nous autorise à utiliser la *convention* suivante : l'opérateur de covariance associé à ζ_0 (dans V_2) est $P_0 A$, en convenant que :

$$P_0 A \varphi = (P_0 A \varphi_1)_2 . \tag{7.42}$$

Nous aurons également besoin de l'inverse de $u P_0 u^*$. Nous avons

$$(u P_0 u^*)^{-1} = (u^*)^{-1} P_0^{-1} u^{-1} \in \mathcal{L}(V_2 ; V_2) , \tag{7.43}$$

et, comme $u^* = A u^{-1}$, (7.43) donne

$$(u P_0 u^*)^{-1} = u A^{-1} P_0^{-1} u^{-1} \in \mathcal{L}(V_2 ; V_2) , \tag{7.44}$$

et nous ferons également la convention: L'inverse de $u P_0 u^*$ est $A^{-1} P_0^{-1}$, en convenant que

$$A^{-1} P_0^{-1} \varphi = (A^{-1} P_0^{-1} \varphi_1)_2 . \tag{7.45}$$

Introduisons alors l'opérateur $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H} ; \mathcal{H})$, défini par

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0 A & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} . \tag{7.46}$$

Nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \text{La mesure cylindrique image de } \mu, \text{ par l'application (7.36), sur} \\ \mathcal{H} \times L^2(0, T; E) \times L^2(0, T; F) \text{ a les caractéristiques suivantes :} \\ - \text{ espérance mathématique } (\vec{\bar{\zeta}} , \bar{\xi}(t) , 0) \text{ où } \vec{\bar{\zeta}} = (\bar{\zeta}_0 , \bar{\zeta}_1) \\ - \text{ opérateur de covariance } \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(t) & 0 \\ 0 & 0 & R(t) \end{pmatrix} . \end{array}\right\} \tag{7.47}$$

L'observation sur le système (7.34) est alors fournie par : (7.48)

$$z(t) = \mathcal{C}(t) \vec{y}(t) + \eta(t) ,$$

où $\mathcal{C}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H} ; F)$ $(\forall\, t \in [\, 0, T \,])$ est défini par (7.49)

$$\mathcal{C}(t) \vec{\varphi} = C(t) \varphi_0 .$$

7.3.2. - Application du critère des moindres carrés.

Le critère des moindres carrés est défini par

$$\mathcal{L}(\theta) = J(\xi , \vec{\zeta}) = \int_0^T < Q^{-1}(t) \left(\xi(t) - \bar{\xi}(t)\right) , \left(\xi(t) - \bar{\xi}(t)\right) > dt$$
$$+ [\, \mathcal{P}_0^{-1} (\vec{\zeta} - \vec{\bar{\zeta}}) , \vec{\zeta} - \vec{\bar{\zeta}} \,]$$
$$+ \int_0^T dt < R^{-1}(t) \left(z(t) - \mathcal{C}(t) \vec{y}(t; \theta)\right) , z(t) - \mathcal{C}(t) \vec{y}(t; \theta) > , \tag{7.50}$$

en posant $\theta = (\xi , \vec{\zeta})$.

L'élément minimisant $\hat{\theta}$ est fourni par l'équation d'Euler

$$\int_0^T < Q^{-1}(t) \left(\xi(t) - \bar{\xi}(t)\right) , \xi(t) > dt + [\, \mathcal{P}_0^{-1} (\vec{\hat{\zeta}} - \vec{\bar{\zeta}}) , \vec{\zeta} \,] \tag{7.51}$$
$$+ \int_0^T < R^{-1}(t) \left(\mathcal{C}(t) \vec{y}(t; \hat{\theta}) - z(t)\right) , \mathcal{C}(t) \vec{\dot{y}}(t; \theta) > dt = 0 , \forall\, \theta ,$$

où $\vec{\dot{y}}(t; \theta)$ représente la solution de (7.34), correspondant à $\vec{f} = 0$.

On pose

$$\vec{y_T} = \vec{y}(\hat{\theta}) \tag{7.52}$$

et soit $\vec{p_T} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ la solution de

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{d\vec{p_T}}{dt} + \mathcal{A}^* \vec{p_T} = \mathcal{C}^*(t) R^{-1}(t) \left(\mathcal{C}(t) \vec{y_T}(t) - z(t)\right) \\ \vec{p_T}(T) = 0 . \end{array}\right\} \tag{7.53}$$

L'équation (7.51) devient alors

$$\int_0^T < Q^{-1}(t)\,(\xi(t) - \overline{\xi}(t))\,,\ \xi(t) > dt + [\ \mathscr{P}_0^{-1}(\tilde{\zeta} - \overline{\zeta})\,,\ \zeta\ ] + [\ p_T(0)\,,\ \zeta\ ]$$
$$+ \int_0^T [\ p_T\,,\ \mathscr{B}(t)\,\xi(t)\ ]\,dt = 0\ ; \qquad (7.54)$$

d'où

$$\tilde{\zeta} = \overline{\zeta} - \mathscr{P}_0\, p_T(0) \qquad (7.55)$$
$$\xi(t) = \overline{\xi}(t) - Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,p_T\,. \qquad (7.56)$$

On commence alors par résoudre le système (qui possède une solution unique)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + \mathscr{A}\,y_T + \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,p_T = \mathscr{B}(t)\,\overline{\xi}(t) + f \\ &-\frac{dp_T}{dt} + \mathscr{A}^*\,p_T - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y_T = -\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ &p_T(T) = 0 \\ &y_T(0) + \mathscr{P}_0\,p_T(0) = \overline{\zeta}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (7.57)$$

L'estimateur optimal de l'état $y(T)$ présent du système (7.34) est alors défini par :

$$\hat{y}_T = y_T(T)\,. \qquad (7.58)$$

8 - Filtrage des systèmes du type (7.34), (7.48).

8.1 - Hypothèses - Notations.

Posons

$$\mathscr{D}_1(t) = \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}\,;\,\mathscr{H}) \qquad (8.1)$$
$$\mathscr{D}_2(t) = \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}\,;\,\mathscr{H})\,. \qquad (8.2)$$

Le système (7.57) s'écrit alors

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + \mathscr{A}\,y_T + \mathscr{D}_1(t)\,p_T = f_1(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + \mathscr{A}^*\,p_T - \mathscr{D}_2(t)\,y_T = f_2(t) \\ &p_T(T) = 0 \\ &y_T(0) = \overline{\zeta} - \mathscr{P}_0\,p_T(0) \end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

en posant

$$f_1(t) = \mathscr{B}(t)\,\overline{\xi}(t) \qquad (8.4)$$
$$f_2(t) = -\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t)\,. \qquad (8.5)$$

Nous allons maintenant adapter le découplage des systèmes étudiés par J.-L. LIONS [35] [(1)], comme au n° 4.

8.2 - Opérateur $\mathscr{P}(t)$. Fonction $r(t)$.

Soit s fixé dans $]\,0, T\,[$ et $h \in \mathscr{H}$ donné. On considère le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} + \mathscr{A}\,\varphi + \mathscr{D}_1(t)\,\psi = f_1 \\ &-\frac{d\psi}{dt} + \mathscr{A}^*\,\psi - \mathscr{D}_2(t)\,\varphi = f_2 \\ &\psi(s) = h \\ &\varphi(0) = \overline{\zeta} - \mathscr{P}_0\,\psi(0)\,. \end{aligned}\right\} \quad t \in\ ]\,0, s\,[\qquad (8.6)$$

(1) on retombe sur les systèmes de J.-L. LIONS, en faisant $\mathscr{P}_0 = 0$

Nous avons

Lemme 8.1 : Le système (8.6) admet une solution unique avec $\overrightarrow{\varphi}$, $\overrightarrow{\psi} \in L^2(0, T; \mathscr{H}) \times L^2(0, T; \mathscr{H})$.

Démonstration :

Le système (8.6) est le système des équations d'Euler associé au problème de contrôle optimal suivant. On désigne par $\theta = (\xi , \overrightarrow{\zeta})$ le contrôle, $\overrightarrow{\varphi}$ l'état du système défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\xi(t) \qquad t \in]0, s[\\ &\overrightarrow{\varphi}(0) = \overrightarrow{\zeta} \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

et le critère est fourni par

$$\mathscr{L}_h^s(\theta) = J_h^s(\xi, \overrightarrow{\zeta}) = \int_0^s < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \bar{\xi}(t)\right), \xi(t) - \bar{\xi}(t) > dt + \left[\mathscr{P}_0^{-1}\left(\overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\bar{\zeta}}\right), \right. \tag{8.8}$$

$$\left.\overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\bar{\zeta}}\right] + \int_0^s < R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t)\overrightarrow{\varphi}(t;\theta)\right), z(t) - \mathscr{C}(t)\overrightarrow{\varphi}(t;\theta) > dt$$

$$+ 2\left[\overrightarrow{h}, \overrightarrow{\varphi}(s;\theta)\right] \blacksquare$$

On en déduit alors, par une démonstration analogue à celle du Lemme 4.2, que l'application

$\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{\varphi}(s)$ est affine continue de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$. *(8.9)*

Par conséquent

Corollaire 8.1 : Il existe $\mathscr{P}(s) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H})$ et $\overrightarrow{r}(s) \in \mathscr{H}$ tels que

$$\overrightarrow{\varphi}(s) = \overrightarrow{r}(s) - \mathscr{P}(s)\overrightarrow{h}\,; \tag{8.10}$$

$\mathscr{P}(t)$ et $\overrightarrow{r}(t)$ étant donnés de la façon suivante :

On résout

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{\beta}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{\beta} + \mathscr{D}_1(t)\overrightarrow{\gamma} = 0 \\ &-\frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\gamma} - \mathscr{D}_2(t)\overrightarrow{\beta} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ dans }]0, s[\\ &\overrightarrow{\gamma}(s) = \overrightarrow{h} \\ &\overrightarrow{\beta}(0) = -\mathscr{P}_0\overrightarrow{\gamma}(0) \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

et alors

$$\overrightarrow{\beta}(s) = -\mathscr{P}(s)\overrightarrow{h}\,; \tag{8.12}$$

On résout

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{\chi}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{\chi} + \mathscr{D}_1(t)\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{f_1} \\ &-\frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\delta} - \mathscr{D}_2(t)\overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{f_2} \end{aligned}\right\} \\ &\overrightarrow{\delta}(s) = 0 \\ &\overrightarrow{\chi}(0) = \overrightarrow{\bar{\zeta}} - \mathscr{P}_0\overrightarrow{\delta}(0) \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

et alors

$$\overrightarrow{r}(s) = \overrightarrow{\chi}(s) \tag{8.14}$$

Lemme 8.2 : $\mathscr{P}(s)$ est auto adjoint, strictement défini positif.

Démonstration :

Soit $\overrightarrow{h} \in \mathscr{H}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ solutions de (8.11) correspondantes. On a

$$0 = \int_0^s \left[-\frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt} + \mathscr{A}^* \overrightarrow{\gamma} - \mathscr{D}_2(t)\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\beta} \right] dt = -\left[\overrightarrow{\gamma}(s), \overrightarrow{\beta}(s)\right] + \left[\overrightarrow{\gamma}(0), \overrightarrow{\beta}(0)\right] \qquad (8.15)$$

$$-\int_0^s \left[\overrightarrow{\gamma}, \mathscr{D}_1(t)\overrightarrow{\gamma}\right] dt - \int_0^s \left[\mathscr{D}_2 \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\beta}\right] dt,$$

d'où

$$\left[\mathscr{P}(s)\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h}\right] = \left[\mathscr{P}_0 \overrightarrow{\gamma}(0), \overrightarrow{\gamma}(0)\right] + \int_0^s \left[\mathscr{D}_2(t)\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\beta}\right] dt + \int_0^s \left[\mathscr{D}_1 \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\gamma}\right] dt. \qquad (8.16)$$

L'égalité (8.16) assure alors le lemme, en raison de la symétrie de la formule, du fait que $\mathscr{D}_1(t)$, $\mathscr{D}_2(t)$ sont définis positifs et du fait que $\mathscr{P}_0$ est *strictement* défini positif.

Lemme 8.3 : Il existe une constante c_1 telle que

$$\left[\mathscr{P}(s)\overrightarrow{h}\right] \leqslant c_1 \left[\overrightarrow{h}\right], \forall \overrightarrow{h} \in \mathscr{H}, s \in [0, T], \qquad (8.17)$$

où $\left[\overrightarrow{h}\right] = \left[\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h}\right]^{1/2}$.

Démonstration :

Les équations (8.11) fournissent le contrôle optimal du système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{\beta}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{\beta} = \mathscr{B}(t)\xi(t) \quad t \in]0, s[\\ &\overrightarrow{\beta}(0) = \overrightarrow{\zeta}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.18)$$

avec la fonction coût $(\theta = (\xi, \overrightarrow{\zeta}))$

$$\tilde{\mathscr{J}}_s^h(\theta) = \tilde{J}_s^h(\xi, \overrightarrow{\zeta}) = \int_0^s < Q^{-1}(t)\xi(t), \xi(t) > dt + \left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\zeta}\right] \qquad (8.19)$$

$$+ \int_0^s < R^{-1}(t)\mathscr{C}(t)\overrightarrow{\beta}(t;\theta), \mathscr{C}(t)\overrightarrow{\beta}(t;\theta) > dt + 2\left[\overrightarrow{h}, \overrightarrow{\beta}(s;\theta)\right],$$

Ce qui peut s'écrire aussi

$$\tilde{\mathscr{J}}_s^h(\theta) = (S_s\theta, \theta) + 2\left[T_s\theta, \overrightarrow{h}\right], \qquad (8.20)$$

où $S_s \in \mathscr{L}\left(L^2(0, s; E) \times \mathscr{H}; L^2(0, s; E) \times \mathscr{H}\right)$ est défini par

$$(S_s\theta, \theta_1) = \int_0^s < Q^{-1}(t)\xi(t), \xi_1(t) > dt + \left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\zeta_1}\right] \qquad (8.21)$$

$$+ \int_0^s < R^{-1}(t)\mathscr{C}(t)\overrightarrow{\beta}(t;\theta), \mathscr{C}(t)\overrightarrow{\beta}(t;\theta_1) > dt$$

et $T_s \in \mathscr{L}\left(L^2(0, s; E) \times \mathscr{H}; \mathscr{H}\right)$ est défini par

$$T_s\theta = \overrightarrow{\beta}(s;\theta). \qquad (8.22)$$

Désignons par θ_s le contrôle optimal ; $\overrightarrow{\theta_s}$ est solution de l'équation

$$(S_s\,\theta_s, \theta) + [T_s\,\theta_s, \overrightarrow{h}] = 0, \tag{8.23}$$

d'où

$$\tilde{\mathscr{L}}_s^h(\theta_s) = [T_s\,\theta_s, \overrightarrow{h}] = -(S_s\,\theta_s, \theta_s). \tag{8.24}$$

Il est aisé de voir que $\| T_s \|$ et $\| S_s \|$ sont bornées par des constantes indépendantes de s. De même, la constante de coercivité de S_s est aussi indépendante de s. De (8.23), résulte alors

$$| \theta_s |_{L^2(0, s; E) \times \mathscr{H}} \leqslant c_2 [\overrightarrow{h}], \tag{8.25}$$

où c_2 est indépendante de $\overrightarrow{h}$ et s. De (8.24), (8.25) il résulte alors que

$$\inf_{\theta} \tilde{\mathscr{L}}_s^h(\theta) = [\overrightarrow{h}, \overrightarrow{\beta}(s; \theta_s)] \geqslant -c_2 [h]^2 \tag{8.26}$$

et comme $\overrightarrow{\beta}(s;\ \theta_s) = -\mathscr{P}(s)\,\overrightarrow{h}$, d'après (8.12), la propriété (8.17) est démontrée.

8.3. Equation de Riccati.

On démontre, comme pour le lemme 4.4, que l'application $t \to [\mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h}]$ est continue sur $[0, T]$. Puis, en se ramenant à la dimension finie, on démontre comme pour le théorème 5.4, les propriétés suivantes :

Soit $\overrightarrow{\varphi}$ quelconque $\in L^2(0, T; \mathscr{H})$, telle que $-\dfrac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^* \overrightarrow{\varphi} \in L^2(0, T; \mathscr{H})$, alors $\mathscr{P}$ est solution de l'équation différentielle du type de Riccati.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d(\mathscr{P}\overrightarrow{\varphi})}{dt} + \mathscr{P}(t)\left(-\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\varphi}\right) + \mathscr{P}(t)\,\mathscr{D}_2(t)\,\mathscr{P}(t)\overrightarrow{\varphi} \\ &+ \mathscr{A}\mathscr{P}(t)\overrightarrow{\varphi} - \mathscr{D}_1(t)\overrightarrow{\varphi} = 0 \\ &\mathscr{P}(0) = \mathscr{P}_0 \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

et $\overrightarrow{r}$ est la solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{r} + \mathscr{P}(t)\,\mathscr{D}_2(t)\overrightarrow{r} = \overrightarrow{f_1} - \mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{f_2} \\ &\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{\zeta}\ ; \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

$\overrightarrow{y_T}$ et $\overrightarrow{p_T}$ solutions de (7.57) sont alors reliés par

$$\overrightarrow{y_T}(t) = \overrightarrow{r}(t) - \mathscr{P}(t)\overrightarrow{p_T}(t); \tag{8.29}$$

d'où, d'après (7.58)

$$\overrightarrow{y_T} = \overrightarrow{r}(T). \tag{8.30}$$

Si maintenant, on s'intéresse à la loi d'évolution de l'estimateur optimal, *i.e.*, à la loi $T \to \overrightarrow{y_T}$, il est clair que cette loi est fournie par l'équation d'évolution (8.28). On a donc résolu le problème du filtrage.

§ 2 : Dualité entre estimation et contrôle.

9. Rappel de résultats généraux.

9.1. Orientation.

La notion de dualité entre les problèmes d'estimation et les problèmes de contrôle, a été

introduite, dans le cas de la dimension finie par R.-E. KALMAN [28]. Une théorie générale de la dualité en optimisation a été faite par ROCKAFELLAR [50] et MOREAU [41]. Par ailleurs J.-D. PEARSON [45], [46] a présenté de façon systématique les systèmes duaux. Nous allons montrer dans ce paragraphe, comment un théorème général de dualité énoncé par J.-L. LIONS [35], et qui rentre dans le cadre de la théorie de ROCKAFELLAR, permet de construire de façon systématique les systèmes duaux de KALMAN et de PEARSON, dans le cas de la dimension infinie.

9.2. **Un résultat de dualité :**

Soit Φ un espace de Hilbert et J (φ) une fonctionnelle sur Φ, définie par

$$J(\varphi) = \Pi(\varphi, \varphi) + 2\,F(\varphi) \tag{9.1}$$

où

$\Pi(\varphi, \psi)$ est une forme bilinéaire continue sur Φ (9.2)

$$\Pi(\varphi, \varphi) \geqslant 0 \tag{9.3}$$

F convexe, semi continue inférieurement, à valeur dans $]-\infty, +\infty]$ et $F \not\equiv +\infty$. (9.4)

On introduit alors la *fonction duale* de F *par rapport* à Π :

$$F^*(\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi} [\Pi(\varphi, \psi) - F(\psi)]. \tag{9.5}$$

Alors (pour une démonstration, cf. par exemple [35]).

Théorème 9.1 : On suppose que

$$\Pi(\varphi, \varphi) \geqslant c \| \varphi \|^2_{\Phi}; \tag{9.6}$$

Alors on a

$$\inf_{\varphi \in \Phi} [\Pi(\varphi, \varphi) + 2\,F(\varphi)] + \inf_{\varphi \in \Phi} [\Pi(\varphi, \varphi + 2\,F^*(\varphi)] = 0. \tag{9.7}$$

Si $\hat{\varphi}$ est l'élément qui réalise la première borne inférieure, alors la deuxième borne est atteinte en $-\hat{\varphi}$.

9.3. **Variante :**

Nous utiliserons beaucoup la variante suivante (cf. J.-L. LIONS [35]).

Théorème 9.2 : On suppose que l'ensemble des contrôles optimaux X est non vide. Alors l'ensemble X^* des ψ tels que l'on ait

$$\Pi(\psi, \psi) + 2\,F^*(\psi) = \inf_{\varphi \in \Phi} [\Pi(\varphi, \varphi) + 2\,F^*(\varphi)] \tag{9.8}$$

est *non vide,* et l'on a encore (9.7).

Remarque 9.1 : En fait le théorème 9.2 contient le théorème 9.1.

Remarque 9.2 : Dans les applications, on a un grand nombre de choix possibles pour appliquer les théorèmes généraux, selon la décomposition de J selon F et Π. Nous allons en examiner un certain nombre.

10. Application aux systèmes elliptiques.

10.1. **Hypothèses - Notations - 1re possibilité d'utilisation du n° 9.**

Nous reprenons le problème de contrôle du n° 2. Les hypothèses et notations sont identiques à 2.1.

Il est alors naturel de prendre

$$\Phi = E \tag{10.1}$$

$$\Pi(\varphi, \psi) = < Q^{-1}\varphi, \psi > + < R^{-1}\mathscr{C}\tilde{y}(\varphi), \mathscr{C}\tilde{y}(\varphi) > \tag{10.2}$$

$$F(\varphi) = - < Q^{-1}\varphi, \bar{\xi} > - < R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}), \mathscr{C}\tilde{y}(\varphi) > \tag{10.3}$$

$$+ \tfrac{1}{2} < Q^{-1}\bar{\xi}, \bar{\xi} > + \tfrac{1}{2} < R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}), \zeta - \mathscr{C}\bar{y} > .$$

Alors le problème de minimiser la fonctionnelle J (ξ), (2.7), est bien équivalent au problème de minimiser la fonctionnelle J (φ), définie en (9.1). Cherchons la fonction duale F* (φ). D'après (9.5) nous avons

$$F^*(\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi} [< Q^{-1}\varphi, \psi > + < R^{-1}\mathscr{C}\tilde{y}(\varphi), \mathscr{C}\tilde{y}(\psi) > + < Q^{-1}\psi, \bar{\xi} > \tag{10.4}$$

$$+ < R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}), \mathscr{C}\tilde{y}(\psi) >] - \tfrac{1}{2} < Q^{-1}\bar{\zeta}, \bar{\zeta} >$$

$$- \tfrac{1}{2} < R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}), \zeta - \mathscr{C}\bar{y} > .$$

En définissant alors $p_1 \in W(0, T)$ solution de

$$A^* p_1 = \mathscr{C}^* R^{-1}\mathscr{C}\tilde{y}(\varphi) + \mathscr{C}^* R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}), \tag{10.5}$$

l'expression (10.4) s'écrit

$$F^*(\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi} [< Q^{-1}\varphi, \psi > + < p_1(\varphi), B\psi > + < Q^{-1}\psi, \bar{\xi} >] - \tfrac{1}{2} < Q^{-1}\bar{\xi}, \bar{\xi} > \tag{10.6}$$

$$- \tfrac{1}{2} < R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}), \zeta - \mathscr{C}\bar{y} > .$$

Il est facile de voir que si $\varphi \neq \hat{\varphi}$ élément vérifiant

$$Q^{-1}(\hat{\varphi} + \bar{\xi}) + B^* p_1(\hat{\varphi}) = 0, \tag{10.7}$$

alors $F^*(\varphi) = +\infty$. D'autre part il existe un élément et un seul $\hat{\varphi}$ vérifiant l'équation (10.7), puisque celle-ci est équivalente à

$$\left.\begin{array}{l} < Q^{-1}(\hat{\varphi} + \bar{\xi}), \psi > + < R^{-1}\mathscr{C}\tilde{y}(\hat{\varphi}), \mathscr{C}\tilde{y}(\psi) > + < R^{-1}(\zeta - \mathscr{C}\bar{y}) \\ \mathscr{C}\tilde{y}(\psi) > = 0 \qquad \forall \psi \in \Phi, \end{array}\right\} \tag{10.8}$$

et l'équation (10.8) se présente sous la forme

$$b(\varphi, \psi) = L(\psi), \tag{10.9}$$

où $b(\varphi, \psi)$ est une fonctionnelle bilinéaire symétrique continue et *cœrcive*, et L (ψ) une fonctionnelle linéaire et continue. Il y a donc unicité de la solution de (10.9). Par conséquent

$$F^*(\varphi) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \varphi \neq \hat{\varphi} \\ -\tfrac{1}{2} < Q^{-1}\bar{\xi}, \bar{\xi} > - \tfrac{1}{2} < R^{-1}(z - \mathscr{C}\bar{y}), z - \mathscr{C}\bar{y} > \text{ si } \varphi = \hat{\varphi}. \end{cases} \tag{10.10}$$

Nous avons alors

$$\inf_{\varphi} J^*(\varphi) = \inf_{\varphi} \{ \Pi(\varphi, \varphi) + 2 F^*(\varphi) \} = \Pi(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}) + 2 F^*(\hat{\varphi}), \tag{10.11}$$

soit

Proposition 10.1 : Le système (en $\tilde{y}$, φ, p_1)

$$\left.\begin{array}{l} A\tilde{y} = B\varphi \\ A^* p_1 = \mathscr{C}^* R^{-1}\mathscr{C}\tilde{y} + \mathscr{C}^* R^{-1}(z - \mathscr{C}\bar{y}) \\ Q^{-1}(\varphi + \bar{\xi}) + B^* p_1 = 0, \end{array}\right\} \tag{10.12}$$

possède une solution et une seule et l'on a

$$\inf J(\varphi) = -J^*(\varphi) = < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > + < R^{-1}(z - \mathscr{C}\overline{y}), z - \mathscr{C}\overline{y} > \qquad (10.13)$$
$$- < Q^{-1}\hat{\varphi}, \hat{\varphi} > - < R^{-1}\mathscr{C}\tilde{y}(\hat{\varphi}), \mathscr{C}\tilde{y}(\hat{\varphi}) > .$$

Remarque 10.1 : D'après le théorème 9.1, $\hat{\varphi} = -\hat{\xi}$ ($\hat{\xi}$ défini en (2.17)), on a alors $\tilde{y}(\hat{\varphi}) = -\hat{y} + \overline{y}$, et $p_1 = -p$ ($\hat{y}$ et p sont solutions de (2.8) et (2.9)), de sorte que (10.13) donne

$$\inf J(\varphi) = < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > + < R^{-1}(z - \mathscr{C}\overline{y}), z - \mathscr{C}\overline{y} > - < Q^{-1}\xi, \xi > \qquad (10.14)$$
$$- < R^{-1}\mathscr{C}\hat{y}, \mathscr{C}\hat{y} > - < R^{-1}\mathscr{C}\overline{y}, \mathscr{C}\overline{y} > + 2 < R^{-1}\mathscr{C}\hat{y}, \mathscr{C}\overline{y} > .$$

Et comme

$$< R^{-1}\mathscr{C}\hat{y} - R^{-1}z, \mathscr{C}\overline{y} > = < R^{-1}\mathscr{C}\hat{y} - R^{-1}z, \mathscr{C}\hat{y} > + < Q^{-1}(\xi - \overline{\xi}), \xi > \qquad (10.15)$$

d'après l'équation d'Euler (2.14), on voit aisément que (10.14) donne

$$\inf J(\varphi) = < Q^{-1}(\xi - \overline{\xi}), \xi - \overline{\xi} > + < R^{-1}(z - \mathscr{C}\hat{y}), z - \mathscr{C}\hat{y} > . \qquad (10.16)$$

Remarque 10.2 : La proposition 10.1 ne donne pas de résultats nouveaux par rapport au théorème 2.1. En fait il n'y a pas, de la façon dont nous avons appliqué le théorème 9.1, de problème dual à proprement parler, puisque le critère dual $J^*(\varphi)$ est égal à $+\infty$ en tout point, sauf pour $\varphi = \hat{\varphi}$.

Remarque 10.3 : Nous allons voir maintenant, qu'en choisissant différemment l'espace Φ, la forme $\Pi(\varphi, \psi)$ et $F(\varphi)$, nous pouvons obtenir un problème dual *non dégénéré.*

10.2 - Construction de systèmes duaux.

10.2.1 - Hypothèses - notations.

Nous reprenons le problème

$$A y = f + B \xi \qquad (10.17)$$

avec le critère

$$\mathscr{J}(\xi) = < Q^{-1}(\xi - \overline{\xi}), \xi - \overline{\xi} > + < R^{-1}(z - \mathscr{C}y), z - \mathscr{C}y > . \qquad (10.18)$$

Nous posons

$$\Phi = E \times V \qquad (10.19)$$

et $\varphi = \{\xi, y\}$.

Nous considérons alors le problème d'optimisation suivant (équivalent à (10.17), (10.18))

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimiser } J(\varphi) = < Q^{-1}(\xi - \overline{\xi}), \xi - \overline{\xi} > + < R^{-1}(z - \mathscr{C}y), z - \mathscr{C}y > \\ \text{pour } \varphi \in \Phi_{ad} = \{\varphi \,|\, A y = f + B \xi\}. \end{array}\right\} \qquad (10.20)$$

Il est clair que Φ_{ad} est un convexe fermé de Φ. Puisque le problème (10.20) est équivalent au problème initial (10.17), (10.18), qui possède une solution unique, le problème (10.20) possède aussi une solution unique.

Nous pouvons maintenant formuler (10.20) dans les termes du n° 9. Posons, en effet

$$\Pi(\varphi, \psi) = < Q^{-1}\xi, \xi_1 > + < R^{-1}\mathscr{C}y, \mathscr{C}y_1 > \qquad (10.21)$$

où $\varphi = \{\xi, y\}$ et $\psi = \{\xi_1, y_1\}$,

$$F(\varphi) = \begin{cases} - < Q^{-1}\xi, \overline{\xi} > - < R^{-1}\mathscr{C}y, z > + \frac{1}{2} < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > \\ \qquad + \frac{1}{2} < R^{-1}z, z > \text{ si } \varphi \in \Phi_{ad} \\ + \infty \text{ sinon.} \end{cases} \qquad (10.22)$$

Alors (10.20) est bien équivalent à

$$\text{minimiser } J(\varphi) = \Pi(\varphi, \varphi) + 2F(\varphi) \text{ sur tout l'espace } \Phi. \qquad (10.23)$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème 9.2.

10.2.2 - Application du théorème 9.2.

Calculons tout d'abord $F^*(\varphi)$. Nous avons

$$F^*(\varphi) = + \sup_{\psi \in \Phi} \{\Pi(\varphi, \psi) - F(\psi)\}, \qquad (10.24)$$

soit puisque $F(\psi) = +\infty$, si $\psi \notin \Phi_{ad}$

$$F^*(\varphi) = -\tfrac{1}{2} < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > - \tfrac{1}{2} < R^{-1} z, z > + \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} \{ < Q^{-1}(\xi + \overline{\xi}), \xi_1 > + < R^{-1}(\mathscr{C}y + z), \mathscr{C}y_1 > \}. \tag{10.25}$$

Posons alors

$$A^* p = -\mathscr{C}^* R^{-1} \mathscr{C}y - \mathscr{C}^* R^{-1} z, \tag{10.26}$$

il vient

$$F^*(\varphi) = -\tfrac{1}{2} < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > - \tfrac{1}{2} < R^{-1} z, z > + \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} \{ < Q^{-1}(\xi + \overline{\xi}, \xi_1 > - < y_1, A^* p > \}. \tag{10.27}$$

Si $\psi = (\xi_1, y_1)$ appartient à Φ_{ad}, alors ξ_1 et y_1 sont liés par (10.17), d'où

$$F^*(\varphi) = -\tfrac{1}{2} < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > - \tfrac{1}{2} < R^{-1} z, z > + \sup_{\xi_1} < \xi_1, Q^{-1}(\xi + \overline{\xi}) - B^* p > - < p, f >, \tag{10.28}$$

soit

$$F^*(\varphi) = \begin{cases} -\tfrac{1}{2} < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > - \tfrac{1}{2} < R^{-1} z, z > - < p, f > \text{ si } \xi \text{ et } y \text{ sont liés} \\ \text{par les relations (10.27) et (10.30)} \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \tag{10.29}$$

$$\xi = -\overline{\xi} + Q B^* p. \tag{10.30}$$

Nous pouvons alors calculer $J^*(\varphi)$

$$J^*(\varphi) = < Q^{-1}\xi, \xi > + < R^{-1}\mathscr{C}y, \mathscr{C}y > - < Q^{-1}\overline{\xi}, \overline{\xi} > - < R^{-1} z, z > - 2 < p, f >; \tag{10.31}$$

si $\varphi = (\xi, y)$ vérifie (10.27) et (10.30) et $+\infty$ sinon.

Par conséquent $\inf_{\varphi} J^*(\varphi)$ revient au problème suivant :

$$\text{minimiser}_{y \in V} < B Q B^* p, p > + < R^{-1}\mathscr{C}y, \mathscr{C}y > - 2 < f + B\overline{\xi}, p > - < R^{-1} z, z >, \tag{10.32}$$

p étant défini en fonction de y par (10.26).

Introduisons maintenant la variable $m \in F'$ définie par

$$m = -R^{-1}\mathscr{C}y \tag{10.33}$$

et la fonctionnelle sur F' définie par

$$\mathscr{L}^*(m) = < B Q B^* p(m), p(m) > + < Rm, m > - 2 < f + B\overline{\xi}, p(m) > - < R^{-1} z, z >, \tag{10.34}$$

où $p(m)$ est la solution de

$$A^* p = -\mathscr{C}^* R^{-1} z + \mathscr{C}^* m \tag{10.35}$$

alors le théorème 9.2 nous permet d'affirmer

$$\inf_{\xi \in E} \mathscr{L}(\xi) = -\inf_{y \in V} \mathscr{L}^*(-R^{-1}\mathscr{C}y). \tag{10.36}$$

Nous allons en fait montrer que

$$\inf_{\xi \in E} \mathscr{L}(\xi) = -\inf_{m \in F'} \mathscr{L}^*(m). \tag{10.37}$$

10.3 - Etude directe des systèmes duaux.

Définition 10.1 : Le problème (10.35), avec pour fonction coût (10.34), sera dit *dual* du problème d'estimation (10.17), (10.18).

Théorème 10.1 : Hypothèses et notations de 10.2.1. Les systèmes duaux (10.17), (10.18) et (10.34), (10.35) vérifient

$$\inf_{\xi \in E} \mathscr{L}(\xi) + \inf_{m \in F'} \mathscr{L}^*(m) = 0. \qquad (10.38)$$

Le contrôle optimal $\hat{\xi}$ du système (10.17), (10.18) est relié à l'*état* du système (10.34), (10.35) par $\hat{\xi} = \overline{\xi} - Q B^* p$. (10.39)

Le contrôle optimal $\hat{m}$ du système (10.34), (10.35) est lié à l'*état* du système (10.17), (10.18) par $\hat{m} = R^{-1} \mathscr{C} y$. (10.40)

Démonstration : soit $\overline{p}$ et $\tilde{p}(m)$ définis respectivement par

$$A^* \overline{p} = - \mathscr{C}^* R^{-1} z \qquad (10.41)$$

$$A^* \tilde{p} = \mathscr{C}^* m, \qquad (10.42)$$

l'équation d'Euler relative à la minimisation de (10.34) s'écrit

$$< B Q B^* p(\hat{m}), \tilde{p}(n) > + < R \hat{m}, n > - < B \overline{\xi} + f, \tilde{p}(n) > = 0, \forall n \in F'. \qquad (10.43)$$

On définit alors y (1) comme la solution de

$$A y + B Q B^* p = f + B \overline{\xi}. \qquad (10.44)$$

On déduit alors aisément de (10.43), que

$$\hat{m} = R^{-1} \mathscr{C} y. \qquad (10.45)$$

Il est alors clair que les équations (10.44) et (10.35), (où m est remplacé par sa valeur issue de (10.45)) sont identiques aux équations (2.8) et (2.9), ce qui implique (10.39) et (10.40).

La propriété (10.38) résulte alors simplement de (10.36) et de (10.45). En effet on a

$$\inf_{m \in F'} \mathscr{L}^*(m) \leqslant \inf_{y \in V} \mathscr{L}^*(- R^{-1} \mathscr{C} y). \qquad (10.46)$$

Or d'après (10.45), $\inf_{m \in F'} \mathscr{L}^*(m)$ est atteint par $\hat{m}$ appartenant à la classe des m de la forme $- R^{-1} \mathscr{C} y$, où $y \in V$. l'inégalité (10.46) est en fait une égalité, et (10.36) implique alors (10.38).

Remarque 10.4 : L'étude du système dual (10.34), (10.35) nous donne le résultat supplémentaire suivant : Dans le théorème 2.1, nous avons énoncé que les équations (2.8) et (2.9) possèdent une solution *unique*. Ce résultat est lié à l'existence et l'unicité de la solution du problème d'estimation (10.17), (10.18), propriétés qui dépendent, entre autres, de l'hypothèse que Q et R sont *inversibles*. En réalité l'hypothèse que Q est inversible, est *superflue*, puisque on retrouve l'existence et l'unicité de la solution de (2.8), (2.9) par l'existence et l'unicité de la solution du problème *dual* (10.34), (10.35), qui elle, exige seulement que R soit inversible, mais non Q.

Remarque 10.5 : Par contre, l'hypothèse que R est inversible, est *fondamentale*. Ceci est conforme aux résultats obtenus par KALMAN-BUCY [14], en dimension finie. Nous verrons au § 4 ce qu'il est possible de faire lorsque R n'est pas inversible.

11 - Application aux systèmes paraboliques.

11.1 - Construction de systèmes duaux. Hypothèses - Notations.

Les notations non redéfinies sont identiques à celles de 3.1. Le problème consiste à minimiser

$$\mathscr{L}(\theta) = (P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \theta)\right), z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \theta) > dt. \qquad (11.1)$$

---

(1) nous utilisons la même notation pour désigner l'état courant $y(m)$ et l'état optimisé $y(\hat{m})$.

où $\theta = (\zeta , \xi) \in H \times L^2 (0, T; E)$ et $y (t; \theta)$ défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A (t) y = f (t) + B (t) \xi (t) \\ &y (0) = \zeta . \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

Remarque 11.1 : On peut, bien entendu, utiliser le théorème général 9.1 de dualité, comme au n° 10.1. On obtient alors un problème dual dégénéré (i. e. une fonctionnelle duale égale à $+ \infty$ partout sauf en un point) et on retombe alors sur les équations d'Euler (3.11) ■

Posons maintenant

$$\Phi = W (0, T) \times L^2 (0, T; E) \times H, \qquad (11.3)$$

et $\varphi = \{ y , \xi , \zeta \}$

$$\Pi (\varphi , \psi) = (P_0^{-1} \zeta , \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1} (t) \xi (t) , \xi_1 (t) > dt$$

$$+ \int_0^T < R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y , \mathscr{C} (t) y_1 > dt \qquad (11.4)$$

où $\psi = \{ y_1 , \xi_1 , \zeta_1 \}$.

Nous désignons par Φ_{ad} le sous ensemble convexe fermé de Φ défini par

$$\Phi_{ad} = \{ \varphi \in \Phi \mid (11.2) \text{ est vérifiée} \}. \qquad (11.5)$$

Posons alors

$$F (\varphi) = \begin{cases} - \int_0^T < Q^{-1} (t) \xi (t) , \overline{\xi} (t) > dt - (P_0^{-1} \zeta , \overline{\zeta}) \\ - \int_0^T < R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y , z (t) > dt + \frac{1}{2} \int_0^T < R^{-1} (t) z (t) , z (t) > dt \\ + \frac{1}{2} (P_0^{-1} \overline{\zeta} , \overline{\zeta}) + \frac{1}{2} \int_0^T < Q^{-1} (t) \overline{\xi} (t) , \overline{\xi} (t) > dt \\ \text{si } \varphi \in \Phi_{ad} \\ + \infty \text{ si } \varphi \notin \Phi_{ad} . \end{cases} \qquad (11.6)$$

Le problème de minimiser $\mathscr{L} (\theta)$ est donc bien équivalent à celui de minimiser la fonctionnelle J (φ) sur tout l'espace. Calculons alors la fonctionnelle duale F* (φ). Nous avons

$$F^* (\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi} [\Pi (\varphi , \psi) - F (\psi)] . \qquad (11.7)$$

Il est clair que, puisque en dehors de Φ_{ad} F $(\psi) = + \infty$, on a

$$F^* (\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} [\Pi (\varphi , \psi) - F (\psi)] , \qquad (11.8)$$

soit

$$F^* (\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} [(P_0^{-1} (\zeta + \overline{\zeta}) , \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1} (t) (\xi (t) + \overline{\xi} (t)) > dt$$

$$+ \int_0^T < R^{-1} (t) (\mathscr{C} (t) y + z) , \mathscr{C} (t) y_1 > dt]$$

$$- \tfrac{1}{2} \int_0^T < R^{-1} (t) z (t) , z (t) > dt - \tfrac{1}{2} (P_0^{-1} \overline{\zeta} , \overline{\zeta}) - \tfrac{1}{2} \int_0^T < Q^{-1} (t) \overline{\xi} (t) , \overline{\xi} (t) > dt . \qquad (11.9)$$

Soit alors p la solution de

$$\left.\begin{aligned} &- \frac{dp}{dt} + A^* (t) p = \mathscr{C}^* (t) R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y - C^* (t) R^{-1} (t) z \\ &p (T) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (11.10)$$

Il vient alors

$$F^* (\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} [(P_0^{-1} (\zeta + \overline{\zeta}) , \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1} (t) (\xi (t) + \overline{\xi} (t)) , \xi_1 (t) > dt$$

$$- \int_0^T < - \frac{dp}{dt} + A^* (t) p , y_1 > dt \Big] - \tfrac{1}{2} \int_0^T < R^{-1} (t) z (t) , z (t) > dt - \tfrac{1}{2} (P_0^{-1} \bar{\zeta} , \bar{\zeta})$$

$$- \tfrac{1}{2} \int_0^T < Q^{-1} (t) \bar{\xi} (t) , \bar{\xi} (t) > dt , \qquad (11.11)$$

soit puisque y_1 , ζ_1 , ξ_1 satisfont à (11.2)

$$F^* (\varphi) = \sup_{\xi_1 , \zeta_1} \Big[(P_0^{-1} (\zeta + \bar{\zeta}) - p (0) , \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1} (t) (\xi (t) + \bar{\xi} (t)$$

$$- \tfrac{1}{2} (P_0^{-1} \bar{\zeta} , \bar{\zeta}) - \tfrac{1}{2} \int_0^T < Q^{-1} (t) \bar{\xi} (t) , \bar{\xi} (t) > dt , \qquad (11.12)$$

donc finalement

$$F^* (\varphi) = \begin{cases} - \int_0^T < f (t) , p (t) > dt - \tfrac{1}{2} \int_0^T < R^{-1} (t) z (t) , z (t) > dt - \tfrac{1}{2} (P_0^{-1} \bar{\zeta} , \bar{\zeta}) \\ - \tfrac{1}{2} \int_0^T < Q^{-1} (t) \bar{\xi} (t) , \bar{\xi} (t) > dt \text{ si } \varphi \text{ vérifie les relations (11.10) et (11.14)} \\ + \infty \text{ sinon} \end{cases} \qquad (11.13)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_0^{-1} (\zeta + \bar{\zeta}) = p (0) \\ Q^{-1} (t) (\xi (t) + \bar{\xi} (t)) = B^* (t) p (t) . \end{array} \right\} \qquad (11.14)$$

Nous considérons maintenant la fonctionnelle $J^* (\varphi) = \Pi (\varphi , \varphi) + 2 F^* (\varphi)$, soit

$$J^* (\varphi) = \int_0^T < R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y (t) , \mathscr{C} (t) y (t) > dt + \int_0^T < Q^{-1} (t) \xi (t) , \xi (t) > dt + (P_0^{-1} \zeta , \zeta)$$
$$+ 2 F^* (\varphi). \qquad (11.15)$$

D'après l'expression (11.13), la borne inférieure de $J^* (\varphi)$ ne peut être atteinte que pour des éléments φ vérifiant (11.10) et (11.14). On peut prendre y comme variable indépendante, et ξ , ζ sont alors déterminés par (11.14). Il vient

$$\inf J^* (\varphi) = \inf_{y \in W (0, T)} \Big\{ \int_0^T < R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y (t) , \mathscr{C} (t) y (t) > dt + \int_0^T < - \bar{\xi} + Q B^* p ,$$

$$- Q^{-1} \bar{\xi} + B^* p > dt + (- \bar{\zeta} + P_0 p (0) , - P_0^{-1} \bar{\zeta} + p (0)) - 2 \int_0^T < f (t) , p (t) > dt \Big\}$$

$$- \int_0^T < R^{-1} (t) z (t) , z (t) > dt - (P_0^{-1} \bar{\zeta} , \bar{\zeta}) - \int_0^T < Q^{-1} (t) \bar{\xi} (t) , \bar{\xi} (t) > dt , \qquad (11.16)$$

soit

$$\inf J^* (\varphi) = \inf_{y \in W (0, T)} \Big\{ \int_0^T < R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y (t) , \mathscr{C} (t) y (t) > dt$$

$$+ \int_0^T < B Q B^* p , p > dt + (P_0 p (0) , p (0))$$

$$- 2 \int_0^T < f (t) + B \bar{\xi} (t) , p (t) > dt - 2 (p (0) , \bar{\zeta}) \Big\}$$

$$- \int_0^T < R^{-1} (t) z (t) , z (t) > dt. \qquad (11.17)$$

On introduit alors

$$m (t) = - R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) y (t) \qquad \in L^2 (0, T; F') \qquad (11.18)$$

et le système

$$\left. \begin{array}{l} - \dfrac{dp}{dt} + A^* (t) p = \mathscr{C}^* (t) m (t) - \mathscr{C}^* (t) R^{-1} (t) z (t) \\ p (T) = 0 , \end{array} \right\} \qquad (11.19)$$

avec la fonction coût

$$\mathscr{L}^* (m) = \int_0^T < R (t) m (t) , m (t) > dt + \int_0^T < B Q B^* p , p > dt + (P_0 p (0) , p (0))$$

$$- 2 \int_0^T < f(t) + B(t)\,\overline{\xi}(t)\,,\, p(t) > dt - 2\,(p(0)\,,\,\overline{\zeta}) - \int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t)\,,\, z(t) > dt. \qquad (11.20)$$

Définition 11.1 : Le problème (11.19), (11.20) sera dit *dual*, du problème d'estimation (11.1) et (11.2) [1] ■

Alors l'application du théorème 9.2 nous donne

$$\inf_{\theta \in H \times L^2(0,T;E)} \mathscr{L}(\theta) = - \inf_{y \in W(0,T)} \mathscr{L}^*\,(-R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y(t)). \qquad (11.21)$$

Nous allons montrer, en fait, comme en (10.37)

$$\inf_{\theta \in H \times L^2(0,T;E)} \mathscr{L}(\theta) = - \inf_{m \in L^2(0,T;F')} \mathscr{L}^*(m). \qquad (11.22)$$

11.2 - **Etude directe des systèmes duaux.**

Théorème 11.1 - Hypothèses - Notations de 11.1. Les problèmes duaux (11.19), (11.20) et (11.1), (11.2) vérifient (11.22) et

Le contrôle optimal $\hat{\theta}$ de (11.1), (11.2) est lié à l'*état* optimal du système (11.19), (11.20) par $\hat{\zeta} = \overline{\zeta} - P_0\,p(0)$, et $\hat{\xi}(t) = \overline{\xi}(t) - Q\,B^*\,p(t)$. } (11.23)

Le contrôle optimal $\hat{m}$ de (11.19), (11.20) est lié à l'*état* optimal de (11.1), (11.2) par $\hat{m}(t) = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y(t)$ } (11.24)

et le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y + B\,Q\,B^*\,p = f(t) + B(t)\,\overline{\xi}(t) \\ &-\frac{dp}{dt} + A^*(t)\,p - \mathscr{C}^*\,R^{-1}\,\mathscr{C}\,y = -\,\mathscr{C}^*\,R^{-1}\,z(t) \\ &y(0) = \overline{\zeta} - P_0\,p(0) \\ &p(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11.25)$$

possède une solution unique.

Démonstration : Nous avons vu déjà pour le théorème 3.1, que le système (11.25) exprimait les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, pour le problème (11.1), (11.2). Le contrôle optimal $(\hat{\zeta}\,,\,\hat{\xi})$ étant fourni en fonction de p, à l'aide de (11.23). Etudions alors (11.19) et (11.20).

La condition d'optimalité d'Euler s'écrit

$$\int_0^T < R(t)\,\hat{m}(t)\,,\, n(t) > dt + \int_0^T < B\,Q\,B^*\,p(\hat{m})\,,\, \tilde{p}(n) > dt$$
$$+ (P_0\,p(0;\hat{m})\,,\,\tilde{p}(0,n)) - \int_0^T < f(t) + B(t)\,\overline{\xi}(t)\,,\,\tilde{p}(n) > dt$$
$$- (\tilde{p}(0;n)\,,\,\overline{\zeta}) = 0 \qquad \forall\, n \in L^2(0,T;F') \qquad (11.26)$$

où $\tilde{p}(n)$ représente la solution de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\tilde{p}}{dt} + A^*(t)\,\tilde{p} = \mathscr{C}^*(t)\,n(t) \\ &\tilde{p}(T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.27)$$

On définit alors $\hat{y}$ solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\hat{y}}{dt} + A(t)\,\hat{y} = -\,B\,Q\,B^*\,p(\hat{m}) + f(t) + B(t)\,\overline{\xi}(t) \\ &\hat{y}(0) = \overline{\zeta} - P_0\,p(0;\hat{m}). \end{aligned}\right\} \qquad (11.28)$$

---

(1) comme en (10.3), nous dirons aussi, par abus de langage, que (11.19), (11.20) et (11.1), (11.2) sont des systèmes duaux.

L'équation (11.26) s'écrit alors

$$\int_0^T < R(t)\,\hat{m}\,,\, n > dt - \int_0^T < \tilde{p}(n)\,,\, \frac{d\hat{y}}{dt} + A(t)\,\hat{y} > dt - \left(\tilde{p}(0;n)\,,\, \hat{y}(0)\right) = 0, \tag{11.29}$$

et, intégrant par parties et utilisant (11.27), il vient

$$\hat{m}(t) = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\hat{y}. \tag{11.30}$$

On voit alors que $\hat{y} = y$ et $p(\hat{m}) = p$ (y et p solutions de (11.25)).

La propriété (11.22) résulte alors de (11.21) et de (11.30). En effet, à priori, on a

$$\inf_{m \in L^2(0,T;F')} \mathscr{L}^*(m) \leqslant \inf_{y \in W(0,T)} \mathscr{L}^*\left(-R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y(t)\right). \tag{11.31}$$

Or, en raison de (11.30), on voit que la borne inférieure de $\mathscr{L}^*(m)$ est atteinte pour un élément m de la forme $-R^{-1}\,\mathscr{C}y$, où $y \in W(0,T)$. L'inégalité (11.31) est en fait une égalité, et (11.22) est une conséquence immédiate de (11.21).

Remarque 11.1 : analogue à la remarque 10.4. L'hypothèse $Q(t)$ et P_0 *inversibles* n'est pas indispensable pour l'existence et l'unicité du problème (11.25). Par contre l'inversibilité de R est indispensable.

Remarque 11.2 : prolongement de la remarque 11.1 à l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Riccati (5.49). Ceci nous permettra au n° 14, d'étudier le comportement à l'infini de l'équation de Riccati.

Remarque 11.3 : Voir remarque générale sur la dualité, 12.2.

12 - Application aux systèmes du type hyperbolique ou « bien posé » au sens de Petrowsky.

12.1 - Construction de systèmes duaux - Hypothèses-Notations.

Nous reprenons les notations de 7.3.1 et 7.3.2. Le problème consiste à minimiser

$$\mathscr{L}(\theta) = \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \overline{\xi}(t)\right),\, \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt + \left[\, \mathscr{P}_0^{-1}\left(\overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right),\, \overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\overline{\zeta}}\,\right]$$
$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}(t;\theta)\right),\, z(t) - \mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}(t;\theta) >, \tag{12.1}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{y}}{dt} + \mathscr{A}\,\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f} + \mathscr{B}(t)\,\xi(t) \\ &\overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{\zeta} \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

et $\theta = (\overrightarrow{\zeta}\,,\, \xi) \in \mathscr{H} \times L^2(0,T;E)$.

Posons

$$\Phi = L^2(0,T;\mathscr{H}) \times L^2(0,T;E) \times \mathscr{H} \tag{12.3}$$

et $\varphi = \{\overrightarrow{y}\,,\, \xi\,,\, \overrightarrow{\zeta}\}$

$$\Pi(\varphi\,,\,\psi) = \int_0^T < Q^{-1}(t)\,\xi(t)\,,\, \xi_1(t) > dt$$
$$+ \left[\, \mathscr{P}_0^{-1}\,\overrightarrow{\zeta}\,,\, \overrightarrow{\zeta_1}\,\right] + \int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}\,,\, \mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y_1} > dt \tag{12.4}$$

où $\psi = \{\overrightarrow{y_1}\,,\, \xi_1\,,\, \overrightarrow{\zeta_1}\}$.

Nous désignons par Φ_{ad} le sous ensemble convexe fermé de Φ défini par

$$\Phi_{ad} = \{\, \varphi \in \Phi \mid (12.2) \text{ est vérifiée } \}. \tag{12.5}$$

Posons alors

$$F(\varphi) = \begin{cases} -\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \xi_1(t) > dt - \left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\zeta_1}\right] \\ -\int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\overrightarrow{y_1}(t), z(t) > dt + \frac{1}{2}\int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt \\ +\frac{1}{2}\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \overline{\xi}(t) > dt + \frac{1}{2}\left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\overline{\zeta}}, \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right] \\ \text{si } \varphi \in \Phi_{ad} \\ +\infty \text{ si } \varphi \notin \Phi_{ad}. \end{cases} \tag{12.6}$$

Le problème de minimiser $\mathscr{L}(\theta)$ est donc bien équivalent à celui de minimiser la fonctionnelle $J(\varphi) = \Pi(\varphi, \varphi) + 2F(\varphi)$ sur tout l'espace. Ces deux problèmes admettent donc une solution et une seule. Calculons alors la fonctionnelle $F^*(\varphi)$. Nous avons (puisqu'en dehors de Φ_{ad}, $F = +\infty$)

$$\begin{aligned} F^*(\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} \Big\{ & \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) + \overline{\xi}(t)\right), \xi_1(t) > dt + \left[\mathscr{P}_0^{-1}\left(\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right), \overrightarrow{\zeta_1}\right] \\ & + \int_0^T < R^{-1}(t)\left(\mathscr{C}(t)\overrightarrow{y}(t) + z(t)\right), \mathscr{C}(t)\overrightarrow{y_1}(t) > dt \Big\} \\ & - \tfrac{1}{2}\left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\overline{\zeta}}, \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right] - \tfrac{1}{2}\int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt \\ & - \tfrac{1}{2}\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \overline{\xi}(t) > dt. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Soit alors $\overrightarrow{p}$ la solution de

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{p} &= -\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\overrightarrow{y}(t) - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ \overrightarrow{p}(T) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Il vient

$$\begin{aligned} F^*(\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi_{ad}} \Big\{ & \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) + \overline{\xi}(t)\right); \xi_1(t) > dt + \left[\mathscr{P}_0^{-1}\left(\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right), \overrightarrow{\zeta_1}\right] \\ & - \int_0^T \left[-\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{p}, \overrightarrow{y_1}\right] dt \Big\} - \tfrac{1}{2}\left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\overline{\zeta}}, \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right] \\ & - \tfrac{1}{2}\int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt - \tfrac{1}{2}\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \overline{\xi}(t) > dt, \end{aligned} \tag{12.9}$$

soit

$$\begin{aligned} F^*(\varphi) = \sup_{\overrightarrow{\zeta_1}, \xi_1} \Big\{ & \left[\mathscr{P}_0^{-1}\left(\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right) - \overrightarrow{p}(0), \overrightarrow{\zeta_1}\right] + \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t)\right. \\ & \left. + \overline{\xi}(t)\right) - \mathscr{B}^*\overrightarrow{p}, \xi_1(t) > dt \Big\} - \int_0^T \left[\overrightarrow{f}, \overrightarrow{p}\right] dt - \tfrac{1}{2}\int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), \\ & z(t) > dt - \tfrac{1}{2}\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \overline{\xi}(t) > dt - \tfrac{1}{2}\left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\overline{\zeta}}, \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right], \end{aligned} \tag{12.10}$$

d'où finalement

$$F^*(\varphi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt - \frac{1}{2}\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \overline{\xi}(t) > dt \\ -\frac{1}{2}\left[\mathscr{P}_0^{-1}\overrightarrow{\overline{\zeta}}, \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right] - \int_0^T \left[\overrightarrow{f}, \overrightarrow{p}\right] dt \text{ si } \varphi \text{ vérifie les relations (12.8)} \\ \text{et (12.12)} \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{12.11}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_0^{-1}\left(\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{\overline{\zeta}}\right) &= \overrightarrow{p}(0) \\ Q^{-1}(t)\left(\xi(t) + \overline{\xi}(t)\right) &= \mathscr{B}^*\overrightarrow{p}. \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

Nous considérons maintenant la fonctionnelle $J^*(\varphi) = \pi(\varphi, \varphi) + 2F^*(\varphi)$. Comme pour (11.5), en raison de l'expression (12.11) de $F^*(\varphi)$, la borne inférieure de $J^*(\varphi)$

ne peut être atteinte que pour des éléments φ vérifiant (12.8) et (12.12). On peut prendre $\vec{y}$ comme variable indépendante, et ξ, $\vec{\zeta}$ sont alors déterminés par (12.12). Il vient

$$\inf_{\varphi} J^*(\varphi) = \inf_{\vec{y}} \Big\{ -2\int_0^T \big[\vec{f}, \vec{p}\big]\,dt + \int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t), \mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t) > dt$$

$$+ \Big[\mathscr{P}_0^{-1}\big(\vec{\vec{\zeta}} - \mathscr{P}_0\,\vec{p}(0)\big), \vec{\vec{\zeta}} - \mathscr{P}_0\,\vec{p}(0)\Big] + \int_0^T < Q^{-1}(t)\,\big(\bar{\xi}(t) - Q(t)\,\mathscr{B}^*\,\vec{p}\big), \qquad (12.13)$$

$$\bar{\xi}(t) - Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\vec{p} > dt \Big\} - \int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt$$

$$- \int_0^T < Q^{-1}(t)\,\bar{\xi}(t), \bar{\xi}(t) > dt - \Big[\mathscr{P}_0^{-1}\vec{\vec{\zeta}}, \vec{\vec{\zeta}}\Big],$$

soit

$$\inf_{\varphi} J^*(\varphi) = \inf_{\vec{y}} \Big\{ \int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t), \mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t) > dt + \big[\mathscr{P}_0\,\vec{p}(0), \vec{p}(0)\big]$$

$$+ \int_0^T \big[\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\vec{p}(t), \vec{p}(t)\big]\,dt - 2\int_0^T \big[f(t) + \mathscr{B}(t)\,\bar{\xi}(t), \vec{p}\big]\,dt \qquad (12.14)$$

$$- 2\Big[\vec{p}(0), \vec{\vec{\zeta}}\Big]\Big\} - \int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt.$$

On introduit alors

$$m(t) = -R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t) \in L^2(0, T; F'), \qquad (12.15)$$

et le système

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\vec{p}}{dt} + \mathscr{A}^*\,\vec{p} &= \mathscr{C}^*(t)\,m(t) - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ \vec{p}(T) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

avec la fonction coût

$$\mathscr{L}^*(m) = \int_0^T < R(t)\,m(t), m(t) > dt + \big[\mathscr{P}_0\,\vec{p}(0), \vec{p}(0)\big] + \int_0^T \big[\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\vec{p}, \vec{p}\big]\,dt - 2\Big[\vec{p}(0), \vec{\vec{\zeta}}\Big] - 2\int_0^T \big[\vec{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\bar{\xi}(t), \vec{p}(t)\big]\,dt \qquad (12.17)$$

$$- \int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t), z(t) > dt.$$

Définition 12.1 : Le problème[1] (12.16), (12.17) sera dit dual du problème d'estimation (12.1), (12.2) ■

Alors l'application du théorème 9.2 nous donne

$$\inf_{\theta \in \mathscr{K} \times L^2(0, T; E)} \mathscr{L}(\theta) = - \inf_{\vec{y} \in L^2(0, T; \mathscr{K})} \mathscr{L}^*\big(-R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t)\big). \qquad (12.18)$$

Nous allons montrer, en fait, comme en (11.22)

$$\inf_{\theta \in \mathscr{K} \times L^2(0, T; E)} \mathscr{L}(\theta) = - \inf_{m \in L^2(0, T; F')} \mathscr{L}^*(m). \qquad (12.19)$$

12.2 Etude directe des systèmes duaux.

Théorème 12.1 : Hypothèses - Notations de 12.1. Les problèmes duaux (12.16), (12.17) et (12.1), (12.2) vérifient (12.19) et

Le contrôle optimal $\hat{\theta}$ de (12.1), (12.2) est lié à *l'état* optimal du système (12.16), (12.17) par $\vec{\zeta} = \vec{\vec{\zeta}} - \mathscr{P}_0\,\vec{p}(0)$, et

$\hat{\xi}(t) = \bar{\xi}(t) - Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\vec{p}(t)$ (12.20)

(1) ou « système »

le contrôle optimal $\hat{m}$ de (12.16), (12.17) est lié à *l'état* optimal du système (12.1), (12.2) par $\hat{m}(t) = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}(t)$ (12.21)

de sorte que le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{y}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{y} + \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{p} = \overrightarrow{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\overrightarrow{\xi}(t) \\ &-\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{p} - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y} = -\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ &\overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{\zeta} - \mathscr{P}_0\overrightarrow{p}(0) \\ &\overrightarrow{p}(T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12.22)$$

possède une solution unique.

Démonstration : Nous savons déjà par 7.3.2, que le système (12.22) possède une solution unique, et que le contrôle optimal $\hat{\theta}$ de (12.1), (12.2) est lié à $\overrightarrow{p}$ par les formules (12.20). Etudions alors (12.16) et (12.17).
La condition d'optimalité d'Euler s'écrit

$$\int_0^T \langle R(t)\,\hat{m}(t), n(t)\rangle\,dt + \int_0^T \left[\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{p}(\hat{m}), \overrightarrow{\tilde{p}}(n)\right] dt \quad (12.23)$$
$$+ \left[\mathscr{P}_0\,\overrightarrow{p}(0;\hat{m}), \overrightarrow{\tilde{p}}(n)\right] - \int_0^T \left[f(t) + \mathscr{B}(t)\,\overrightarrow{\xi}(t), \overrightarrow{\tilde{p}}(n)\right] dt - \left[\overrightarrow{\tilde{p}}(0;n), \overrightarrow{\zeta}\right] = 0$$

$\forall\, n \in L^2(0, T; F')$,
où $\overrightarrow{\tilde{p}}(n)$ représente la solution de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\overrightarrow{\tilde{p}}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\tilde{p}} = \mathscr{C}^*(t)\,n(t) \\ &\overrightarrow{\tilde{p}}(T) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (12.24)$$

On définit alors $\overrightarrow{\hat{y}}$ solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{\hat{y}}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{\hat{y}} = \overrightarrow{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\overrightarrow{\xi}(t) - \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*\overrightarrow{p}(\hat{m}) \\ &\overrightarrow{\hat{y}}(0) = \overrightarrow{\zeta} - \mathscr{P}_0\overrightarrow{p}(0;\hat{m}). \end{aligned}\right\} \quad (12.25)$$

L'équation (12.23) s'écrit alors

$$\int_0^T \langle R(t)\,\hat{m}, n\rangle\,dt - \int_0^T \left[\frac{d\overrightarrow{\hat{y}}}{dt} + A(t)\,\overrightarrow{\hat{y}}, \overrightarrow{\tilde{p}}(n)\right] dt - \left[\overrightarrow{\tilde{p}}(0;n), \overrightarrow{\hat{y}}(0)\right] = 0 \quad (12.26)$$

et, intégrant par parties, et utilisant (12.24), il vient

$$\hat{m}(t) = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{\hat{y}}. \quad (12.27)$$

On voit alors que $\overrightarrow{\hat{y}} = \overrightarrow{y}$, et $\overrightarrow{p}(\hat{m}) = \overrightarrow{p}$ ($\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{p}$ solutions de (12.22))

Calculons maintenant $\inf \mathscr{L}^*(m)$. Nous avons, grâce à (12.21)

$$\inf \mathscr{L}^*(m) = \int_0^T \langle R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}, \mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}\rangle\,dt + \int_0^T \left[\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{p}, \overrightarrow{p}\right] dt \quad (12.28)$$
$$+ \left[\mathscr{P}_0\overrightarrow{p}(0), \overrightarrow{p}(0)\right] - 2\int_0^T \left[\overrightarrow{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\overrightarrow{\xi}(t), \overrightarrow{p}(t)\right] dt$$
$$- 2\left[\overrightarrow{p}(0), \overrightarrow{\zeta}\right] - \int_0^T \langle R^{-1}(t)\,z(t), z(t)\rangle\,dt.$$

Par ailleurs grâce à (12.22), on a

$$\int_0^T \left[\overrightarrow{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\overrightarrow{\xi}(t), \overrightarrow{p}(t)\right] dt + \left[\overrightarrow{p}(0), \overrightarrow{\zeta}\right] = \int_0^T \left[\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{p}, \right. \quad (12.29)$$

$\overrightarrow{p}]\, dt + [\, \mathscr{P}_0 \overrightarrow{p}(0), \overrightarrow{p}(0)\,] + \int_0^T < R^{-1}\, \mathscr{C}\, \overrightarrow{y}, \mathscr{C}\, \overrightarrow{y} - z > dt,$

et en portant dans (12.28), il en résulte, en tenant compte de (12.20)

$$inf\, \mathscr{L}^*(m) = -\int_0^T < R^{-1}(t)\, (\mathscr{C}(t)\, \overrightarrow{y} - z(t)), \mathscr{C}(t)\, \overrightarrow{y} - z(t) > dt \qquad (12.30)$$

$$- \int_0^T < Q^{-1}(t)\, (\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t)), \hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t) > dt - [\, \mathscr{S}_0^{-1}(\hat{\overrightarrow{\zeta}} - \bar{\overrightarrow{\zeta}}), \hat{\overrightarrow{\zeta}} - \bar{\overrightarrow{\zeta}}\,]$$

$$= - inf\, \mathscr{L}(\theta).$$

12.3 Nouvelle écriture du problème dual.

Nous allons réécrire le système dual (12.16), (12.17) avec les composantes, de façon à définir le dual de (7.4), (7.5), (7.6) et (7.14). Nous avons si $\overrightarrow{p} = \{p_0, p_1\}$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_0}{dt} + p_1 = A^{-1}\, C^*(t)\, m(t) - A^{-1}\, C^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t) \\ &-\frac{dp_1}{dt} - A p_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12.31)$$

d'où en posant $p = p_1$, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p}{dt^2} + Ap = C^*(t)\, m(t) - C^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t) \\ &p(T) = 0 \\ &\frac{dp}{dt}(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.32)$$

et la fonction coût correspondante se déduit de (12.17). On obtient

$$\mathscr{L}^*(m) = \int_0^T < R(t)\, m(t), m(t) > dt + < P_0 \frac{dp}{dt}(0), \frac{dp}{dt}(0) > \qquad (12.33)$$

$$+ (P_1 p(0), p(0)) + \int_0^T (\mathscr{B}^*(t)\, Q(t)\, B(t)\, p(t), p(t))\, dt + 2\left(\frac{dp}{dt}(0), \zeta_0\right)$$

$$- 2\,(p(0), \zeta_1) - 2\int_0^T (p(t), B(t)\, \bar{\xi}(t))\, dt - \int_0^T < R^{-1}(t)\, z(t), z(t) > dt.$$

Remarque 12.1 : Analogue à la remarque 11.1. L'hypothèse « P_0, P_1, $Q(t)$ inversibles » peut être supprimée.

Remarque 12.2 : On voit en comparant les problèmes de contrôle (7.4), (7.5), (7.6), (7.14) et (12.32), (12.33) que le contrôle du système initial est un élément de $L^2(0, T; E) \times V \times H$, et que celui du système dual est un élément de $L^2(0, T; F')$. On a donc deux problèmes de minimisation, non équivalents du point de vue difficulté. Il est donc intéressant d'introduire le problème dual si celui-ci est *plus simple* que le problème initial.

13. Dualité et pénalisation.

13.1 Orientation :

Nous avons présenté la méthode de pénalisation au n° 6.1, Chap. II. Nous pouvons appliquer cette méthode aux problèmes d'optimisation issu de la théorie de l'estimation. Nous prendrons, par exemple, le cas des systèmes paraboliques, notations du n° 11, soit (11.1) et (11.2) [1]. Nous supposerons, en outre, pour simplifier (mais ce n'est pas indispensable) que

(1) Bien entendu, le cas des systèmes elliptiques ou hyperboliques est tout à fait analogue.

$f \in L^2(0, T; H)$ *(13.1)*

$B \in \mathscr{L}(L^2(0, T; E); L^2(0, T; H))$. *(13.2)*

Le problème pénalisé associé à (11.1) et (11.2) est alors défini par

$$\underset{\varphi \in \Phi}{\text{minimiser}} \ \mathscr{L}_\epsilon(\varphi) = (P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}) + \int_0^T < Q^{-1}(t)(\xi(t) - \overline{\xi}(t)), \quad \textit{(13.3)}$$

$$\xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt + \int_0^T < R^{-1}(t)(z(t) - \mathscr{C}(t) y(t)), z(t)$$

$$- \mathscr{C}(t) y(t) > dt + \frac{1}{\epsilon} \left| \frac{dy}{dt} + A(t) y - f - B\xi \right|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon} |y(0) - \zeta|^2_H$$

$\Phi = Y \times L^2(0, T; E) \times H$ *(13.4)*

où Y est défini par

$$Y = \left\{ y \in L^2(0, T; V) \ \middle| \ \frac{dy}{dt} + A(t) y \in L^2(0, T; H) \right\}. \quad \textit{(13.5)}$$

Ce qui nous intéresse dans ce numéro, c'est d'étudier le problème dual de (13.3). Nous verrons que, dans un certain sens, la méthode de pénalisation se transforme par dualité, en une *régularisation* (cf. 5.2). De plus la dualité nous permettra de fournir une majoration de l'erreur, lorsque $\epsilon \to 0$ (cf. des considérations analogues pour la théorie de ROCKAFELLAR, faites par TARTAR [56]).

13.2 Définition de $\pi(\varphi, \psi)$ et $F_\epsilon(\varphi)$.

Nous prendrons (comme en (11.4))

$$\pi(\varphi, \psi) = (P_0^{-1} \zeta, \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1}(t) \xi(t), \xi_1(t) > dt \quad \textit{(13.6)}$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) y(t), \mathscr{C}(t) y_1(t) > dt$$

où $\varphi = \{y, \xi, \zeta\}$, $\psi = \{y_1, \xi_1, \zeta_1\}$.

Nous définissons $F_\epsilon(\varphi)$ par

$$F_\epsilon(\varphi) = - \int_0^T < Q^{-1}(t) \xi(t), \overline{\xi}(t) > dt - (P_0^{-1} \zeta, \overline{\zeta}) - \int_0^T < R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) y, \quad \textit{(13.7)}$$

$$z(t) > dt + \tfrac{1}{2} \int_0^T < R^{-1}(t) z(t), z(t) > dt + \tfrac{1}{2} (P_0^{-1} \overline{\zeta}, \overline{\zeta})$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^T < Q^{-1}(t) \overline{\xi}(t), \overline{\xi}(t) > dt$$

$$+ \frac{1}{2\epsilon} \left| \frac{dy}{dt} + A(t) y - f - B\xi \right|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\epsilon} |y(0) - \zeta|^2_H.$$

Alors la fonctionnelle $\mathscr{L}_\epsilon(\varphi)$ se met sous la forme

$$\mathscr{L}_\epsilon(\varphi) = \Pi(\varphi, \varphi) + 2 F_\epsilon(\varphi). \quad \textit{(13.8)}$$

13.3. Recherche de la fonctionnelle duale $F_\epsilon^*(\varphi)$.

Nous avons

$$F^*(\varphi) = \sup_{\psi \in \Phi} \left\{ (P_0^1 \zeta, \zeta_1) + \int_0^T < Q^{-1}(t) \xi(t), \xi_1(t) > dt \right.$$

$$\left. + \int_0^T < R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) y, \mathscr{C}(t) y_1 > dt \right. \quad \textit{(13.9)}$$

$$+\int_0^T <Q^{-1}(t)\,\xi_1(t),\bar{\xi}(t)>dt+(P_0^{-1}\zeta_1,\bar{\zeta})+\int_0^T <R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y_1,z(t)>dt$$

$$-\frac{1}{2\epsilon}\left|\frac{dy_1}{dt}+A(t)\,y_1-f-B\xi_1\right|^2_{L^2(Q)}-\frac{1}{2\epsilon}|\,y_1(0)-\zeta_1|^2_H\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T <R^{-1}(t)\,z(t),z(t)>dt-\frac{1}{2}\,(P_0^{-1}\bar{\zeta},\bar{\zeta})-\frac{1}{2}\int_0^T <Q^{-1}(t)\,\bar{\xi}(t),\bar{\xi}(t)>dt$$

$$=-\inf_{\phi\in\Phi}\left\{\frac{1}{2\epsilon}\left|\frac{dy_1}{dt}+A(t)y_1-f-B\xi_1\right|^2_{L^2(Q)}+\frac{1}{2\epsilon}|\,y_1(0)-\zeta_1|^2_H-(P_0^{-1}(\zeta+\bar{\zeta}),\zeta_1)\right.$$

$$-\int_0^T <Q^{-1}(t)\,(\xi(t)+\bar{\xi}(t)),\xi_1(t)>dt-\int_0^T <R^{-1}(t)\,(\mathscr{C}(t)\,y+z(t)),\mathscr{C}(t)\,y_1>dt$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T <R^{-1}(t)\,z(t),z(t)>dt+\frac{1}{2}\,(P_0^{-1}\bar{\zeta},\bar{\zeta})+\frac{1}{2}\int_0^T <Q^{-1}(t)\,\bar{\xi}(t),\bar{\xi}(t)>dt\right\}.$$

Pour calculer la borne inférieure de la fonctionnelle quadratique située entre crochets, nous allons faire un changement de variable. Posons

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy_1}{dt}+A(t)\,y_1=f+B\,\xi_1+\tilde{\xi}_1\\&y_1(0)=\zeta_1+\zeta_1\,.\end{aligned}\right\}\qquad(13.10)$$

Il y a maintenant quatre variables indépendantes, ζ_1 , $\tilde{\zeta}_1\in H$ et $\xi_1\in L^2(0,T;E)$, $\tilde{\xi}_1\in L^2(0,T;H)$. On a alors, en posant $\tilde{\psi}=[\,\zeta_1,\tilde{\zeta}_1,\xi_1,\tilde{\xi}_1\,]$

$$F^*(\varphi)=-\inf_{\tilde{\psi}}\left\{\frac{1}{2\epsilon}\int_0^T|\,\tilde{\xi}_1(t)|^2\,dt+\frac{1}{2\epsilon}|\,\tilde{\zeta}_1|^2_H-(P_0^{-1}(\zeta+\bar{\zeta}),\zeta_1)\right.\qquad(13.11)$$

$$-\int_0^T <Q^{-1}(t)\,(\xi(t)+\bar{\xi}(t)),\xi_1(t)>dt-\int_0^T <R^{-1}(t)\,(\mathscr{C}(t)\,y+\zeta(t)),\mathscr{C}(t)\,y_1>dt$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T <R^{-1}(t)\,z(t),z(t)>dt+\frac{1}{2}\,(P_0^{-1}\bar{\zeta},\bar{\zeta})+\frac{1}{2}\int_0^T <Q^{-1}(t)\,\bar{\xi}(t),\bar{\xi}(t)>dt\right\}.$$

Introduisons alors $p\equiv p(y)$ définie par

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{dp}{dt}+A^*(t)\,p=-\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y-\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t)\\&p(T)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(13.12)$$

Alors on a

$$F^*(\varphi)=-\inf_{\tilde{\psi}}\left\{\frac{1}{2\epsilon}\left(\int_0^T|\,\tilde{\xi}_1(t)|^2\,dt+|\,\tilde{\zeta}_1|^2_H\right)+(p(0)-P_0^{-1}(\zeta+\bar{\zeta}),\zeta_1)\right.\qquad(13.13)$$

$$+(p(0),\tilde{\zeta}_1)+\int_0^T <\xi_1(t),B^*p-Q^{-1}(t)\,(\xi(t)+\bar{\xi}(t))>dt$$

$$\left.+\int_0^T(p,\tilde{\xi}_1)\,dt\right\}-\int_0^T(p,f)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^T <R^{-1}(t)\,z(t),z(t)>dt$$

$$-\frac{1}{2}\,(P_0^{-1}\bar{\zeta},\bar{\zeta})-\frac{1}{2}\int_0^T <Q^{-1}(t)\,\bar{\xi}(t),\bar{\xi}(t)>dt.$$

Posons

$$G_\epsilon(\tilde{\psi}) = \frac{1}{2\epsilon}\left(\int_0^T |\tilde{\xi}_1(t)|^2\,dt + |\tilde{\zeta}_1|_H^2\right) + \left(p(0) - P_0^{-1}(\zeta+\bar{\zeta}), \zeta_1\right) + \left(p(0), \tilde{\zeta}_1\right) \qquad (13.14)$$

$$+ \int_0^T < \xi_1(t), B^* p - Q^{-1}(t)\left(\xi(t) + \bar{\xi}(t)\right) > dt + \int_0^T (p, \tilde{\xi}_1)\,dt).$$

On voit alors aisément que pour que $\inf_{\tilde{\psi}} G_\epsilon(\tilde{\psi})$ soit différent de $-\infty$, il est *nécessaire* que

$$\left.\begin{aligned} &p(0) - P_0^{-1}(\zeta+\bar{\zeta}) = 0 \\ &B^* p - Q^{-1}(t)\left(\xi(t) + \bar{\xi}(t)\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.15)$$

Si (13.15) est vérifié, on a alors

$$\inf_{\tilde{\psi}} G_\epsilon(\tilde{\psi}) = \inf_{\tilde{\xi}_1}\left\{\frac{1}{2\epsilon}\int_0^T |\tilde{\xi}_1(t)|^2\,dt + \int_0^T (p, \tilde{\xi}_1)\,dt\right\} \qquad (13.16)$$

$$+ \inf_{\tilde{\zeta}_1}\left\{\frac{1}{2\epsilon}|\tilde{\zeta}_1|_H^2 + \left(p(0), \tilde{\zeta}_1\right)\right\}.$$

On voit alors aisément que, dans (13.16), le premier *inf* est atteint pour $\tilde{\xi}_1 = -\epsilon p$, et le second est atteint pour $\tilde{\zeta}_1 = -\epsilon p(0)$, de sorte que l'on a, si (13.15) est vérifiée

$$\inf_{\tilde{\psi}} G_\epsilon(\tilde{\psi}) = -\frac{\epsilon}{2}\int_0^T |p(t)|^2\,dt - \frac{\epsilon}{2}|p(0)|^2. \qquad (13.17)$$

Proposition 13.1 : La fonctionnelle $F^*(\varphi)$ définie en (13.9) est donnée par

$$F^*(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2}\displaystyle\int_0^T |p(t)|^2\,dt + \frac{\epsilon}{2}|p(0)|^2 - \int_0^T (p, f')\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T < R^{-1}(t) z(t), z(t) > dt \\ -\dfrac{1}{2}(P_0^{-1}\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T < Q^{-1}(t)\bar{\xi}(t), \bar{\xi}(t) > dt \qquad (13.18) \\ \text{si } \varphi = \{y, \zeta, \xi\} \text{ vérifie les relations (13.12), (13.15)} \\ +\infty, \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

13.4. Définition des systèmes duaux.

Nous allons tout d'abord appliquer le théorème 9.2. Nous pouvons le faire, car la fonctionnelle $\mathscr{L}_\epsilon(\varphi)$ (13.3) atteint sa borne inférieure. En effet, on peut démontrer aisément que $\mathscr{L}_\epsilon(\varphi)$, qui est une fonctionnelle quadratique sur Φ (13.4), est *coercive* sur cet espace[1]. Nous devons, par conséquent, considérer $\inf_{\varphi}\{\Pi(\varphi,\varphi) + 2F_\epsilon^*(\varphi)\}$. Il est clair, d'après la proposition 13.1, que la borne inférieure ne peut être atteinte que pour des éléments φ vérifiant (13.12) et (13.15). En raison de (13.15), nous pouvons prendre y comme variable indépendante, et ζ, ξ s'expriment en fonction de y, grâce à (13.15). Alors, on a

$$\inf_{\varphi}\{\Pi(\varphi,\varphi) + 2F_\epsilon^*(\varphi)\} = \inf_{y\in Y}\int_0^T < R^{-1}(t)\mathscr{C}(t)y(t), \mathscr{C}(t)y(t) > dt \qquad (13.19)$$

(1) Pour la démonstration dans le cas de fonctionnelles analogues à $\mathscr{L}_\epsilon(\varphi)$, cf. [35], [11]. Rappelons qu'une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur un hilbert V est *coercive* si $a(v, v) \geqslant \gamma \|v\|^2$, $\forall v \in V$; γ étant un nombre positif.

$$+ \left(-\bar{\zeta} + \ P_0 p(0), -P_0^{-1}\bar{\zeta} + p(0)\right) + \int_0^T < -\bar{\xi}(t) + Q(t) B^*(t) p(t), -Q^{-1}(t)\bar{\xi}(t)$$

$$+ B^*(t) p(t) > dt + \epsilon \int_0^T |p(t)|^2 dt + \epsilon |p(0)|^2 - 2\int_0^T (p, f)\, dt\Big\}$$

$$- \int_0^T < R^{-1}(t) z(t), z(t) > dt - (P_0^{-1}\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) - \int_0^T < Q^{-1}(t)\bar{\xi}(t), \bar{\xi}(t) > dt$$

$$= \inf_{y \in Y} \Big\{ \int_0^T < R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) y(t), \mathscr{C}(t) y(t) > dt + \left(P_0 p(0), p(0)\right)$$

$$+ \int_0^T \left(B(t) Q(t) B^*(t) p(t), p(t)\right) dt + \epsilon \int_0^T |p(t)|^2 dt + \epsilon |p(0)|^2$$

$$- 2(\bar{\zeta}, p(0)) - 2\int_0^T \left(f + B(t)\bar{\xi}(t), p(t)\right) dt\Big\} - \int_0^T < R^{-1}(t) z(t), z(t) > dt$$

et d'après le théorème 9.2,

$$= -\inf_{\theta} \mathscr{L}_\epsilon(\theta).$$

Nous introduisons maintenant le système

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dp}{dt} + A^*(t) p &= \mathscr{C}^*(t) m(t) - \mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t) z(t) \\ p(T) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (13.20)$$

avec la fonction coût $\left(m \in L^2(0, T; F)\right)$

$$\mathscr{L}_\epsilon^*(m) = \int_0^T < R(t) m(t), m(t) > dt + \left(P_0 p(0), p(0)\right) + \int_0^T \left(B(t) Q(t) B^*(t) p(t), p(t)\right) dt$$

$$+ \epsilon \int_0^T |p(t)|^2 dt + \epsilon |p(0)|^2 - 2(\bar{\zeta}, p(0)) - 2\int_0^T (f + B(t)\bar{\xi}(t), p(t))\, dt \qquad (13.21)$$

$$- \int_0^T < R^{-1}(t) z(t), z(t) > dt.$$

Définition 13.1. Le problème (13.20), (13.21) sera dit dual du problème (13.3), la dualité étant prisé par rapport à Π et F_ϵ définies en 13.2 ■

Le théorème 9.2 nous dit alors que

$$\inf_{\theta} \mathscr{L}_\epsilon(\theta) = -\inf_{y} \mathscr{L}_\epsilon^*\left(-R^{-1}(t)\mathscr{C}(t) y(t)\right). \qquad (13.22)$$

Nous allons obtenir plus, par l'étude directe des systèmes duaux.

13.5. Etude directe des systèmes duaux.

Théorème 13.1 : Les problèmes (13.3) et (13.20), (13.21) vérifient (sous les hypothèses et notations de 13.1 et 13.2) :

Le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t) y + BQB^* p + \epsilon p = f + B\bar{\xi} \\ &-\frac{dp}{dt} + A^*(t) p - \mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t)\mathscr{C}(t) y = -\mathscr{C}^* R^{-1} z(t) \\ &y(0) + P_0 p(0) + \epsilon p(0) = \bar{\zeta} \\ &p(T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13.23)$$

possède une solution unique.

Le contrôle optimal $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{y}$ du problème (13.3) est fourni par $\hat{y} = y$, $\hat{\zeta} = \bar{\zeta} - P_0 p(0)$, $\hat{\xi}(t) = \bar{\xi}(t) - Q B^* p$. } *(13.24)*

Le contrôle optimal $\hat{m}$ du problème (13.20), (13.21) est fourni par $\hat{m} = R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) y$. } *(13.25)*

On a $\inf_{\theta} \mathscr{L}_\epsilon(\theta) + \inf_{m} \mathscr{L}_\epsilon^*(m) = 0.$ *(13.26)*

Démonstration

a) *étude du problème (13.3)*

Nous allons faire, comme en 13.3, un changement de variables. Posons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t) y = f + B\xi + \xi_1 \\ &y(0) = \zeta + \zeta_1 . \end{aligned}\right\} \quad (13.27)$$

De sorte que nous avons, quatre variables indépendantes $\xi \in L^2(0, T; E)$, $\xi_1 \in L^2(0, T; H)$, $\zeta \in H$, $\zeta_1 \in H$. Le problème (13.3) revient à minimiser la fonctionnelle $\tilde{\mathscr{L}}_\epsilon(\tilde{\theta})$, où $\tilde{\theta} = (\xi , \xi_1 , \zeta , \zeta_1)$, définie par :

$$\tilde{\mathscr{L}}_\epsilon(\tilde{\theta}) = \left(P_0^{-1}(\zeta - \bar{\zeta}) , \zeta - \bar{\zeta}\right) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \bar{\xi}(t)\right), \xi(t) - \bar{\xi}(t) > dt \quad (13.28)$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t) y(t)\right), z(t) - \mathscr{C}(t) y(t) > dt$$

$$+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^T |\xi_1(t)|^2 dt + \frac{1}{\epsilon}|\zeta_1|^2 .$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\bar{y}}{dt} + A(t)\bar{y} = f \\ &\bar{y}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13.29)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} + A(t) y_1 = \xi_1 \\ &y_1(0) = \zeta_1 \end{aligned}\right\} \quad (13.30)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_2}{dt} + A(t) y_2 = B(t)\xi(t) \\ &y_2(0) = \zeta. \end{aligned}\right\} \quad (13.31)$$

Alors on a

$$y(\tilde{\theta}) = \bar{y} + y_1(\xi_1, \zeta_1) + y_2(\xi, \zeta), \quad (13.32)$$

et en posant

$$\bar{z}(t) = z(t) - \mathscr{C}(t)\bar{y}(t), \quad (13.33)$$

$\tilde{\mathscr{L}}_\epsilon(\tilde{\theta})$ devient

$$\tilde{\mathscr{L}}_\epsilon(\tilde{\theta}) = \left(P_0^{-1}(\zeta - \bar{\zeta}), \zeta - \bar{\zeta}\right) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \bar{\xi}(t)\right), \xi(t) - \bar{\xi}(t) > dt \quad (13.34)$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\left(\bar{z}(t) - \mathscr{C}(t) y_1 - \mathscr{C}(t) y_2\right), \bar{z}(t) - \mathscr{C}(t) y_1 - \mathscr{C}(t) y_2 > dt$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\int_0^T |\xi_1|^2\,dt+\frac{1}{\epsilon}|\zeta_1|^2.$$

Ecrivons alors les équations d'Euler d'optimalité. Il vient

$$\left.\begin{aligned}&(P_0^{-1}\hat{\zeta},\zeta)+\int_0^T<Q^{-1}(t)\,\hat{\xi}(t),\xi(t)>dt+\int_0^T<R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\hat{y}_2,\mathscr{C}y_2>dt\\&-(P_0^{-1}\bar{\zeta},\zeta)-\int_0^T<Q^{-1}(t)\,\bar{\xi}(t),\xi(t)>dt\\&-\int_0^T<R^{-1}(t)\,\bar{z}(t)-\mathscr{C}(t)\,\hat{y}_1,\mathscr{C}(t)\,y_2>dt=0\quad\forall\,\zeta,\xi\in H\times L^2(0,T;E)\end{aligned}\right\}\quad(13.35)$$

$$\begin{aligned}&\int_0^T<R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\hat{y}_1,\mathscr{C}(t)\,y_1>dt+\frac{1}{\epsilon}(\hat{\xi}_1,\xi_1)_{L^2(Q)}+\frac{1}{\epsilon}(\hat{\zeta}_1,\zeta_1)_H\\&-\int_0^T<R^{-1}(t)\,(\bar{z}(t)-\mathscr{C}(t)\,\hat{y}_2),\mathscr{C}y_1>dt=0,\quad\forall\,\xi_1,\zeta_1\in L^2(Q)\times H\end{aligned}\qquad(13.36)$$

soit encore

$$\begin{aligned}&(P_0^{-1}(\hat{\zeta}-\bar{\zeta}),\zeta)+\int_0^T<Q^{-1}(\hat{\xi}(t)-\bar{\xi}(t)),\xi(t)>dt\\&-\int_0^T<R^{-1}(t)\,(z(t)-\mathscr{C}(t)\,\hat{y}),\mathscr{C}(t)\,y_2>dt=0\quad\forall\,\zeta,\xi\end{aligned}\qquad(13.37)$$

$$\begin{aligned}&(\text{où }\hat{y}=\hat{y}_1+\hat{y}_2=y_1(\hat{\xi}_1,\hat{\zeta}_1)+y_2(\hat{\xi},\hat{\zeta}))\\&\frac{1}{\epsilon}(\hat{\xi}_1,\xi_1)_{L^2(Q)}+\frac{1}{\epsilon}(\hat{\zeta}_1,\zeta_1)_H-\int_0^T<R^{-1}(t)\,(z(t)-\mathscr{C}(t)\,\hat{y}),\mathscr{C}(t)\,y_1>dt\\&=0\ \forall\,\zeta_1,\xi_1.\end{aligned}$$

On pose alors

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{d\hat{p}}{dt}+A^*(t)\,\hat{p}=\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\hat{y}-\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t)\\&\hat{p}(T)=0.\end{aligned}\right\}\quad(13.38)$$

Les équations (13.36) et (13.37) donnent alors

$$\begin{aligned}&0=(P_0^{-1}(\hat{\zeta}-\bar{\zeta}),\zeta)+\int_0^T<Q^{-1}(t)\,(\hat{\xi}(t)-\bar{\xi}(t)),\xi(t)>dt\\&+\int_0^T<-\frac{d\hat{p}}{dt}+A^*\hat{p},y_2>dt=(P_0^{-1}(\hat{\zeta}-\bar{\zeta})+\hat{p}(0),\zeta)\end{aligned}\qquad(13.39)$$

$$+\int_0^T<Q^{-1}(t)\,(\hat{\xi}(t)-\bar{\xi}(t))+B^*\hat{p},\xi(t)>dt,$$

et

$$0=\frac{1}{\epsilon}(\hat{\xi}_1,\xi_1)_{L^2(Q)}+\frac{1}{\epsilon}(\hat{\zeta}_1,\zeta_1)+(\hat{p}(0),\zeta_1)+(\hat{p},\xi_1)_{L^2(Q)}\qquad(13.40)$$

soit enfin

$$\hat{\zeta}=\bar{\zeta}-P_0\,\hat{p}(0)\qquad(13.41)$$

$$\hat{\xi}(t)=\bar{\xi}(t)-Q(t)\,B^*(t)\,\hat{p}\qquad(13.42)$$

$$\dot{\xi}_1 = -\epsilon\,\hat{p} \qquad (13.43)$$

$$\xi_1 = -\epsilon\,\hat{p}\,(0) \qquad (13.44)$$

d'où, en portant dans (13.27) et (13.38), on déduit (12.23) et (12.24).

b) *étude du problème (13.20), (13.21).*

Soit $\overline{p}$ et $\tilde{p}\,(m)$ définis par

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\overline{p}}{dt} + A^*(t)\,\overline{p} = -\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ &\overline{p}\,(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.45)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\tilde{p}}{dt} + A^*(t)\,\tilde{p} = \mathscr{C}^*(t)\,m(t) \\ &\tilde{p}\,(T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.46)$$

Ecrivons l'équation d'Euler relative à (13.20, (13.21), il vient

$$0 = \int_0^T < R(t)\,\hat{m}(t)\,,\, m(t) > dt + \left(P_0\,\tilde{p}\,(0;\hat{m})\,,\,\tilde{p}\,(0;m)\right)$$

$$+ \left(P_0\,\overline{p}\,(0)\,,\,\tilde{p}\,(0;m)\right) + \int_0^T \left(B\,Q\,B^*\,\tilde{p}\,(t;\hat{m})\,,\,\tilde{p}\,(t;m)\right) dt$$

$$+ \int_0^T \left(B\,Q\,B^*\,\overline{p}\,(t)\,,\,\tilde{p}\,(t;m)\right) dt + \epsilon \int_0^T \left(\tilde{p}\,(\hat{m})\,,\,\tilde{p}\,(m)\right) dt$$

$$+ \epsilon \int_0^T \left(\overline{p}\,,\,\tilde{p}\,(m)\right) dt + \epsilon\left(\tilde{p}\,(0;\hat{m})\,,\,\tilde{p}\,(0;m)\right) + \epsilon\left(\overline{p}\,(0)\,,\,\tilde{p}\,(0;m)\right) - \left(\overline{\zeta}\,,\,\tilde{p}\,(0;m)\right)$$

$$- \int_0^T \left(f + B\,\overline{\xi}\,,\,\tilde{p}\,(m)\right) dt\,, \qquad (13.47)$$

soit, en posant $p\,(\hat{m}) = \hat{p}$

$$0 = \int_0^T < R(t)\,\hat{m}(t)\,,\, m(t) > dt + \left(P_0\,\hat{p}\,(0) + \epsilon\,\hat{p}\,(0) - \overline{\zeta}\,,\,\tilde{p}\,(0;m)\right)$$

$$+ \int_0^T \left(B\,Q\,B^*\,\hat{p} + \epsilon\,\hat{p} - f - B\,\overline{\xi}\,,\,\tilde{p}\,(m)\right) dt\,, \qquad (13.48)$$

et si on définit $\hat{y}$ par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\hat{y}}{dt} + A(t)\,\hat{y} = -B\,Q\,B^*\,\hat{p} - \epsilon\,\hat{p} + f + B\,\overline{\xi} \\ &\hat{y}\,(0) = -P_0\,\hat{p}\,(0) - \epsilon\,\hat{p}\,(0) + \overline{\zeta}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (13.49)$$

l'équation (13.48) devient

$$0 = \int_0^T < R(t)\,\hat{m}(t) - \mathscr{C}(t)\,\hat{y}\,,\, m(t) > dt\,, \qquad (13.50)$$

ce qui prouve que $\hat{y}$ et $\hat{p}$ sont égaux respectivement à y , p (définis en (13.23) et aussi (13.25)).

c) *propriété (13.26).*

Calculons *inf* $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$. Nous avons

$$\inf \mathscr{L}_\epsilon(\theta) = \left(P_0\,p\,(0)\,,\,p\,(0)\right) + \int_0^T (B\,Q\,B^*\,p\,,\,p)\,dt$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t)\,y(t)\right),$$

$$z(t) - \mathscr{C}(t)\,y(t) > dt + \epsilon \int_0^T |\,p\,|^2\,dt + \epsilon\,|\,p\,(0)\,|^2 \qquad (13.51)$$

et

$$\inf \mathscr{L}_\epsilon^*(m) = \int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y(t)\,,\,\mathscr{C}(t)\,y(t) > dt$$

$$+ \left(P_0\,p\,(0)\,,\,p\,(0)\right) + \int_0^T (B\,Q\,B^*\,p\,,\,p)\,dt$$

$$+ \epsilon \int_0^T |\,p\,|^2\,dt + \epsilon\,|\,p\,(0)\,|^2 - 2\,\left(\zeta\,,\,p\,(0)\right)$$

$$- 2 \int_0^T (f + B\,\overline{\xi}\,,\,p)\,dt - \int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t)\,,\,z(t) > dt. \qquad (13.52)$$

Or d'après (13.23), on a

$$\int_0^T (f + B\,\overline{\xi}\,, p)\,dt = \int_0^T (B\,Q\,B^*\,p\,, p)\,dt + \epsilon \int_0^T |\,p\,|^2\,dt$$

$$+ \int_0^T \left(p\,, \frac{dy}{dt} + A(t)\,y \right) dt$$

$$= \int_0^T (B\,Q\,B^*\,p\,, p)\,dt + \epsilon \int_0^T |\,p\,|^2\,dt - \left(p(0)\,, \overline{\zeta} - P_0\,p(0) - \epsilon\,p(0)\right)$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y\,,\ \mathscr{C}(t)\,y > dt - \int_0^T < R^{-1}(t)\,z\,,\ \mathscr{C}(t)\,y(t) > dt\,, \qquad (13.53)$$

soit, en portant dans (13.52), il vient

$$\inf \mathscr{L}_\epsilon^*(m) = -\int_0^T < R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,y\,,\ \mathscr{C}(t)\,y > dt$$

$$+ 2\int_0^T < R^{-1}(t)\,z\,,\ \mathscr{C}(t)\,y(t) > dt$$

$$- \int_0^T < R^{-1}(t)\,z(t)\,, z(t) > dt - \left(P_0\,p(0)\,, p(0)\right) - \int_0^T (B\,Q\,B^*\,p\,, p)\,dt$$

$$- \epsilon \int_0^T |\,p\,|^2\,dt - \epsilon\,|\,p(0)\,|^2 \qquad (13.54)$$

et en comparant à (13.51)

$$= -\inf \mathscr{L}_\epsilon(\theta).$$

13.6 - Interprétation de (13.20), (13.21).

La pénalisation nous a fait remplacer le problème (11.1), (11.2) par le problème (13.3). Le dual de (11.1), (11.2) était (11.19), (11.20). Le dual de (13.3) est (13.20), (13.21). Comparons (11.19), (11.20) à (13.20), (13.21).

Nous constatons que l'équation d'évolution et le contrôle sont identiques, il s'agit donc du même système physique. Par contre, les fonctions coût sont différentes et sont liées par la relation

$$\mathscr{L}_\epsilon^*(m) = \mathscr{L}^*(m) + \epsilon \int_0^T |\,p(t)\,|^2\,dt + \epsilon\,|\,p(0)\,|^2 \qquad (13.55)$$

ce qui montre bien que la fonctionnelle $\mathscr{L}_\epsilon^*(m)$ n'est autre que la *régularisée* de la fonctionnelle $\mathscr{L}^*(m)$, à l'aide de $\int_0^T |\,p(t)\,|^2\,dt + |\,p(0)\,|^2$.

13.7 - Convergence lorsque $\epsilon \to 0$.

Nous changeons de notations, pour être plus clairs. Le problème initial est (11.1), (11.2) (contrôle ξ , ζ, variable d'état y), son dual est (11.19), (11.20) (contrôle m, variable d'état p). Nous représentons par $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{y}$, $\hat{m}$, $\hat{p}$ les éléments optimaux correspondants. De sorte que, on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\hat{y}}{dt} + A(t)\,\hat{y} + B\,Q\,B^*\,\hat{p} = f(t) + B(t)\,\overline{\xi}(t) \\ &-\frac{d\hat{p}}{dt} + A^*(t)\,\hat{p} - \mathscr{C}^*\,R^{-1}\,\mathscr{C}\,\hat{y} = \mathscr{C}^*\,R^{-1}\,z \\ &\hat{y}(0) = \overline{\zeta} - P_0\,\hat{p}(0) \\ &\hat{p}(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.56)$$

$$\hat{\zeta} = \overline{\zeta} - P_0\,\hat{p}(0) \qquad (13.57)$$

$$\hat{\xi}(t) = \overline{\xi}(t) - Q\,B^*\,\hat{p}(t). \qquad (13.58)$$

Le problème pénalisé est (13.3), contrôle (ξ , ζ , y), fonctionnelle $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$. Son dual est (13.20), (13.21), (contrôle m, variable d'état p), fonctionnelle $\mathscr{L}_\epsilon^*(m)$. Nous représentons

par $\hat{\xi}_\epsilon$, $\hat{\zeta}_\epsilon$, $\hat{y}_\epsilon$, $\hat{m}_\epsilon$, $\hat{p}_\epsilon$ les éléments optimaux correspondants, de sorte que, on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\hat{y}_\epsilon}{dt} + A(t)\,\hat{y}_\epsilon + B\,Q\,B^*\,\hat{p}_\epsilon + \epsilon\,\hat{p}_\epsilon = f + B\,\overline{\xi} \\ &-\frac{d\hat{p}_\epsilon}{dt} + A^*(t)\,\hat{p}_\epsilon - \mathscr{C}^*\,R^{-1}\,\mathscr{C}\,\hat{y}_\epsilon = -\mathscr{C}^*\,R^{-1}\,z \\ &\hat{y}_\epsilon(0) + P_0\,\hat{p}_\epsilon(0) + \epsilon\,\hat{p}_\epsilon(0) = \overline{\zeta} \\ &\hat{p}_\epsilon(T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13.59)$$

$$\hat{\zeta}_\epsilon = \overline{\zeta} - P_0\,\hat{p}_\epsilon(0) \quad (13.60)$$

$$\hat{\xi}_\epsilon = \overline{\xi} - Q\,B^*\,\hat{p}_\epsilon \quad (13.61)$$

$$\hat{m}_\epsilon = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\hat{y}_\epsilon \quad (13.62)$$

et

$$\hat{m} = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\hat{y}. \quad (13.63)$$

Nous avons alors

Théorème 13.2 : Hypothèses et notations de 13.7. Lorsque $\epsilon \to 0$, on a

$$\hat{y}_\epsilon \to \hat{y} \text{ fortement dans Y (défini en (13.5))} \quad (13.64)$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{p}_\epsilon \to \hat{p} \text{ fortement dans } L^2(0, T; V) \text{ et} \\ &-\frac{d\hat{p}_\epsilon}{dt} + A^*(t)\,\hat{p}_\epsilon \to -\frac{d\hat{p}}{dt} + A^*(t)\,\hat{p} \text{ dans } L^2(0, T; H). \end{aligned}\right\} \quad (13.65)$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\zeta}_\epsilon \to \hat{\zeta} \text{ fortement dans H} \\ &\hat{\xi}_\epsilon \to \hat{\xi} \text{ fortement dans } L^2(0, T; E) \\ &\hat{m}_\epsilon \to \hat{m} \text{ fortement dans } L^2(0, T; F'). \end{aligned}\right\} \quad (13.66)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) \to \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}), \text{ avec la majoration} \\ &\mathscr{L}(\hat{\theta}) - \epsilon\,\mathscr{L}_1(\hat{m}) < \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) < \mathscr{L}(\hat{\theta}) \text{ où} \\ &\mathscr{L}_1(\hat{m}) = \int_0^T |\hat{p}(t)|^2\,dt + |\hat{p}(0)|^2_H\,. \end{aligned}\right\} \quad (13.67)$$

Démonstration. On a d'abord

$$\mathscr{L}_\epsilon^*(\hat{m}_\epsilon) \to \mathscr{L}^*(\hat{m}). \quad (13.68)$$

En effet, on a

$$\mathscr{L}^*(\hat{m}) = inf\ \mathscr{L}^*(m) \leqslant inf\ \mathscr{L}_\epsilon^*(m) = \mathscr{L}_\epsilon^*(\hat{m}_\epsilon) < \mathscr{L}^*(\hat{m}) + \epsilon\,\mathscr{L}_1(\hat{m}). \quad (13.69)$$

De (13.68) et (13.69), on déduit, puisque $\mathscr{L}_\epsilon^*(\hat{m}_\epsilon) = -\mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon)$, et $\mathscr{L}^*(\hat{m}) = -\mathscr{L}(\hat{\theta})$, les propriétés (13.67).

De (13.69), et de l'expression de $\mathscr{L}_\epsilon^*(m)$, on déduit

$$|\hat{m}_\epsilon|_{L^2(0, T; E)} \leqslant \text{Cte}, \quad (13.70)$$

et, en raison de la deuxième et quatrième équations (13.59), on obtient aussi

$$|\hat{p}_\epsilon|_{W(0, T)} \leqslant \text{Cte}, \quad (13.71)$$

puis, grâce à la première et troisième équations (13.59)

$$|\hat{y}_\epsilon|_{W(0, T)} \leqslant \text{Cte}. \quad (13.72)$$

Si donc on extrait une sous suite, encore notée $\hat{p}_\epsilon$, $\hat{y}_\epsilon$, faiblement convergente dans $W(0, T) \times W(0, T)$ vers p^* , y^* , on voit aisément en passant à la limite dans (13.59) que p^* et y^* doivent satisfaire (13.56). En raison de l'unicité de la solution de (13.56), on a

toute la suite $\hat{y}_\epsilon$, $\hat{p}_\epsilon$ converge faiblement dans $W(0, T) \times W(0, T)$ vers $\hat{y}$, $\hat{p}$. (13.73)

D'autre part, comme $\mathscr{L}_\epsilon^*(\hat{m}_\epsilon) \to \mathscr{L}^*(\hat{m})$, il en résulte avec la convergence faible, que $\hat{m}_\epsilon \to \hat{m}$ dans $L^2(0, T; F')$ fortement, (13.74)

d'où aussi (13.65), puis (13.64), et enfin (13.66).

Remarque 13.1 : Outre des résultats connus sur la convergence de la méthode de pénalisation, le théorème 13.2 fournit *une majoration de l'erreur.*

14 - Comportement à l'infini de la solution P (*t*) de l'équation de Riccati (5.49).

14.1 - Orientation

Nous donnerons au n° suivant, l'interprétation probabiliste de la solution P (*t*) de l'équation de Riccati. Ceci justifiera, avec l'importante question de l'observabilité stochastique (cf. n° 23.3), l'intérêt d'étudier le comportement de P (*t*), lorsque $t \to +\infty$.
Comme l'équation de Riccati (5.49) résulte du découplage du système (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) et que ce découplage n'est possible que parce que ce système a une solution et une seule et est relié à un problème de contrôle, la remarque 11.2 s'applique. Par conséquent, il n'est pas nécessaire que P_0 et Q (*t*) soient inversibles pour affirmer que l'équation de Riccati (5.49) possède une solution unique. Nous allons étudier alors le comportement à l'infini de P (*t*), dans le cas suivant

$$P_0 = 0, \tag{14.1}$$

c'est-à-dire dans le cas où l'état initial y (0) du système 3.3 est connu *exactement.* L'hypothèse (14.1) est tout à fait conforme aux travaux de KALMAN et BUCY [13], [14] en dimension finie. Le cas $P_0 \neq 0$ pose, déjà en dimension finie, de grosses difficultés et nous ne l'aborderons pas ici.

14.2 - Hypothèses - Notations.

On considère, pour $\tau > 0$, le système analogue à (4.33)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_\tau}{dt} + A(t)\,\beta_\tau + D_1(t)\,\gamma_\tau = 0 \\ &-\frac{d\gamma_\tau}{dt} + A^*(t)\,\gamma_\tau - D_2(t)\,\beta_\tau = 0 \\ &\gamma_\tau(T) = h \\ &\beta_\tau(-\tau) = 0, \end{aligned}\right\} \quad t \in]-\tau, T[\tag{14.2}$$

avec les hypothèses suivantes

$$< A(t)\,\varphi, \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|_V^2 \qquad \forall\, t \leqslant T ; \forall\, \varphi \in V, \alpha > 0 \tag{14.3}$$

les autres notations, intervenant dans (14.2), sont identiques à celles correspondantes de 4.1. (14.4)

Le système (14.2) est le système donnant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, pour le problème de contrôle optimal suivant [1]

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\gamma_\tau}{dt} + A^*(t)\,\gamma_\tau = \mathscr{C}^*(t)\,m(t) \qquad t \in]-\tau, T[\\ &\gamma_\tau(T) = h ; \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

avec la fonction coût

$$L_h^\tau(m) = \int_{-\tau}^{T} < D_1(t)\,\gamma_\tau(t), \gamma_\tau(t) > dt + \int_{-\tau}^{T} < R(t)\,m(t), m(t) > dt. \tag{14.6}$$

On vérifie alors facilement (comme au n° 4.5), que le système (14.2) possède une solution unique, et qu'il existe un opérateur $P_\tau(t)$ tel que l'on ait

$$\beta_\tau(t) = -P_\tau(t)\,\gamma_\tau(t) \qquad t \in]-\tau, T[, \tag{14.7}$$

---

(1) cf. le système dual (11.19), (11.20).

et l'opérateur $P_\tau(t)$ vérifie alors l'équation de Riccati

$$\frac{d}{dt}(P_\tau \varphi) + P_\tau\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^* \varphi\right) + P_\tau D_2 P_\tau \varphi$$
$$+ A P_\tau \varphi = D_1 \varphi \qquad t \in]-\tau, T[\qquad (14.8)$$
$$P_\tau(-\tau) = 0$$

pour tout $\varphi \in L^2(-\tau, T; V)$ tel que $-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi \in L^2(-\tau, T; H)$.

14.3 - **Le cas $\tau = +\infty$.**

Nous considérons alors le problème de contrôle optimal suivant : L'état γ_∞ du système est défini par

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\gamma_\infty}{dt} + A^*(t)\gamma_\infty &= \mathscr{C}^*(t) m(t) \qquad t \in]-\infty, T[\\ \gamma_\infty(T) &= h, \end{aligned}\right\} \qquad (14.9)$$

avec comme fonction coût

$$L_h^\infty(m) = \int_{-\infty}^T < D_1(t)\gamma_\infty(t), \gamma_\infty(t) > dt + \int_{-\infty}^T < R(t) m(t), m(t) > dt. \qquad (14.10)$$

Pour tout $m \in L^2(-\infty, T; E)$, la solution γ_∞ de (14.9) existe et est unique grâce à l'hypothèse (14.3) (qui est vraie aussi pour $A^*(t)$).

Nous définirons l'état adjoint par la solution β_∞ de l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_\infty}{dt} + A(t)\beta_\infty + D_1(t)\gamma_\infty = 0 \qquad t \leqslant T \\ &\beta_\infty \in L^2(-\infty, T; V). \end{aligned}\right\} \qquad (14.11)$$

On a

Proposition 14.1 : L'état adjoint β_∞ est défini de façon unique par (14.11).

Démonstration :

Posons pour simplifier

$$\tilde{\varphi} = -D_1 \gamma_\infty \in L^2(-\infty, T; H). \qquad (14.12)$$

Il s'agit de trouver $\beta_\infty \in L^2(-\infty, T; V)$ satisfaisant à

$$\frac{d\beta_\infty}{dt} + A(t)\beta_\infty = \tilde{f} \qquad t \leqslant T, \qquad (14.13)$$

d'où il résulte que $\frac{d\beta_\infty}{dt} \in L^2(-\infty, T; V')$, ce qui entraîne que $\beta_\infty(t)$ est continue de $t \leqslant T \to H$ et nulle pour $t = -\infty$.

Unicité : supposons que (14.13) ait lieu avec $\tilde{f} = 0$. Alors on a

$$\int_{-\infty}^T < \frac{d\beta_\infty}{dt}, \beta_\infty > dt + \int_{-\infty}^T < A(t)\beta_\infty, \beta_\infty > dt = 0, \qquad (14.14)$$

soit

$$\tfrac{1}{2}|\beta_\infty(T)|^2 + \alpha \int_{-\infty}^T \|\beta_\infty(t)\|_V^2 \, dt \leqslant 0, \text{ donc } \beta_\infty = 0. \qquad (14.15)$$

Existence : Soit β_τ la solution dans $L^2(-\tau, T; V)$ de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_\tau}{dt} + A\beta_\tau = \tilde{f} \text{ dans }]-\tau, T[\\ &\beta_\tau(-\tau) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.16)$$

On déduit de (14.16) que l'on a

$$\tfrac{1}{2}|\beta_\tau(T)|^2 + \alpha \int_{-\tau}^T \|\beta_\tau(t)\|^2 \, dt \leqslant \int_{-\tau}^T |\tilde{f}(t)| \, \|\beta_\tau(t)\| \, dt, \qquad (14.17)$$

d'où

$$\int_{-\tau}^{T} \| \beta_\tau(t) \|^2 \, dt \leqslant c_1 \int_{-\tau}^{T} | \tilde{f}(t) |_H^2 \, dt \leqslant c_1 \int_{-\infty}^{T} | \tilde{f}(t) |_H^2 . \qquad (14.18)$$

Alors si

$$\tilde{\beta}_\tau = \text{prolongement de } \beta_\tau \text{ par 0 pour } t < -\tau . \qquad (14.19)$$

$$\tilde{f}_\tau = \begin{cases} \tilde{f} \text{ dans }]-\tau, T[\\ 0 \text{ pour } t < -\tau , \end{cases} \qquad (14.20)$$

on a

$$\frac{d\tilde{\beta}_\tau}{dt} + A(t)\,\tilde{\beta}_\tau = \tilde{f}_\tau \text{ sur }]-\infty, T[, \qquad (14.21)$$

et d'après (14.18) on a

$$\int_{-\infty}^{T} \| \tilde{\beta}_\tau(t) \|^2 \, dt \leqslant c_2 . \qquad (14.22)$$

On peut donc extraire une suite $\tau_n \to +\infty$ telle que

$$\tilde{\beta}_{\tau_n}(t) \to \overline{\beta} \text{ dans } L^2(-\infty, T; V) \text{ faible.} \qquad (14.23)$$

On peut alors passer à la limite dans (14.21) et l'on a

$$\frac{d\overline{\beta}}{dt} + A(t)\,\overline{\beta} = \tilde{f} \qquad (14.24)$$

et il suffit donc de prendre $\beta_\infty = \overline{\beta}$ ■

Le contrôle optimal m_∞ est alors donné par la solution du système

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\gamma_\infty}{dt} + A^*(t)\,\gamma_\infty - D_2(t)\,\beta_\infty = 0 \\ \frac{d\beta_\infty}{dt} + A(t)\,\beta_\infty + D_1(t)\,\gamma_\infty = 0 \end{aligned}\right\} \quad t \in]-\infty, T[$$

$$\gamma_\infty(T) = h \qquad (14.25)$$

et

$$m_\infty(t) = R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\beta_\infty(t) . \qquad (14.26)$$

On voit alors, en raisonnant sur $]-\infty, s[$ $s \leqslant T$ (au lieu de $]0, s[$), que

$$\beta_\infty(t) = -P_\infty(t)\,\gamma_\infty(t) \text{ sur }]-\infty, T[, \qquad (14.27)$$

l'opérateur $P_\infty(s)$ étant défini par

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\,\gamma - D_2\,\beta = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta + D_1\,\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad t \in]-\infty, s[$$

$$\gamma(s) = h , \qquad (14.28)$$

et alors on a

$$\beta(s) = -P_\infty(s)\,h . \qquad (14.29)$$

On a, en outre, le résultat suivant.

Théorème 14.1 : Hypothèses et notations de 14.2, avec, de plus

$$A(t) = A , B(t) = B , Q(t) = Q , R(t) = R , \mathscr{C}(t) = \mathscr{C} . \qquad (14.30)$$

Alors $P_\infty(s) = P_\infty$ ne dépend pas de s et vérifie

$$\left.\begin{aligned} &A\,P_\infty\,\varphi + P_\infty\,A^*\,\varphi + P_\infty\,D_2\,P_\infty\,\varphi = D_1\,\varphi \\ &\forall\,\varphi \in V, \text{ tel que } A^*\,\varphi \in H. \end{aligned}\right\} \qquad (14.31)$$

Démonstration : Il suffit dans le système (14.28) de faire la translation $t \to t - s$ pour remarquer que l'on a $\beta(s) = \beta(0)$, donc $P_\infty(s) = P_\infty(0)$. L'équation (14.31) se déduit alors de l'équation de Riccati habituelle.

14.4 - **Passage à la limite lorsque $\tau \to +\infty$.**

Théorème 14.2 : Hypothèses et notations de 14.2 et 14.3. Alors on a

$$\left(P_\tau(T)\, h\,,\, \overline{h}\right) \to \left(P_\infty(T)\, h\,,\, \overline{h}\right) \qquad (14.32)$$

lorsque $\tau \to +\infty$, $\forall\, T$, h , $\overline{h} \in H$.

Démonstration : Soit m_τ le contrôle optimal du problème (14.5), (14.6), et β_τ , γ_τ les solutions correspondantes de (14.2). Nous prolongeons m_τ , β_τ , γ_τ par 0 pour $t < -\tau$. Soient $\hat{m}_\tau$, $\tilde{\beta}_\tau$, $\tilde{\gamma}_\tau$ les fonctions ainsi définies, elles satisfont aux relations (14.2) et (14.5), écrites pour $t \leqslant T$. On a

$$\inf_m L_h^\tau(m) = \left(P_\tau(T)\, h\,,\, h\right) \leqslant L_h^\tau(0) \leqslant C\,|h|^2\,, \qquad (14.33)$$

d'où

$$|P_\tau(T)\, h| \leqslant C\,|h| \quad \forall\, \tau\,. \qquad (14.34)$$

Par ailleurs de (14.6), on tire

$$\int_{-\tau}^{T} |m_\tau(t)|^2_F\, dt \leqslant C_1\,, \qquad (14.35)$$

soit

$$\int_{-\infty}^{T} |\hat{m}_\tau(t)|^2_F\, dt \leqslant C_1\,, \qquad (14.36)$$

d'où il résulte grâce à (14.5) et (14.2) que $\tilde{\gamma}_\tau$ et β_τ demeurent dans des bornés de $W(-\infty, T)$ [1]. On peut donc trouver une suite $\tau_n \to +\infty$ telle que $\tilde{m}_{\tau_n} \to \overline{m}$, $\tilde{\beta}_{\tau_n} \to \overline{\beta}$, $\tilde{\gamma}_{\tau_n} \to \overline{\gamma}$, dans les topologies faibles correspondantes. Il est clair que $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ vont satisfaire à (14.25), donc $\overline{\beta} = \beta_\infty$, $\overline{\gamma} = \gamma_\infty$. Donc $\tilde{\beta}_{\tau_n}(T) \to \beta_\infty(T)$ dans H faible, d'où (14.32).

§ 3 : Propriétés stochastiques des estimateurs.

15 - Orientation générale. Cas des systèmes elliptiques.

15.1 - Orientation.

Nous avons défini au § 1 les estimateurs issus de la méthode des moindres carrés pour les systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles du type elliptique, parabolique, hyperbolique (ou bien posé au sens de Petrowsky).

Nous montrerons qu'à chacun de ces estimateurs est associée une mesure cylindrique. Il est intéressant de rechercher alors l'espérance mathématique et l'opérateur de covariance correspondants. Ceci nous permettra, en particulier, d'interpréter la solution de l'équation de Riccati. De plus, nous donnerons certaines propriétés de ces estimateurs, qui nous permettront au § 4 de faire quelques remarques sur les questions de l'observabilité et de la contrôlabilité stochastique.

15.2 - Cas des systèmes elliptiques.

15.2.1 - Hypothèses - Notations.

Nous reprenons les notations de 2.1 et 2.2. Le système est représenté par

$$A\, y = f + B\, \xi\,, \qquad (15.1)$$

l'observation par

$$z = \mathscr{C}\, y + \eta\,, \qquad (15.2)$$

et l'estimateur optimal $\hat{y}$ était fourni par

$$\left.\begin{aligned} A\, \hat{y} + D_1\, p &= f + B\, \overline{\xi} \\ A^*\, p - D_2\, \hat{y} &= -\,\mathscr{C}^*\, R^{-1}\, z\,. \end{aligned}\right\} \qquad (15.3)$$

---

(1) $W(-\infty, T) = \left\{ \varphi \in L^2(-\infty, T; V) \,\middle|\, \dfrac{d\varphi}{dt} \in L^2(-\infty, T; V') \right\}$

Nous introduisons l'erreur d'estimation ϵ définie par

$$\epsilon = \hat{y} - y. \tag{15.4}$$

De (15.1), (15.2), (15.3) on déduit

$$A\,\epsilon + D_1 p = -B\,\xi \tag{15.5}$$

$$A^*\,p - D_2\,\epsilon = -\mathscr{C}^*\,R^{-1}\,\eta\,, \tag{15.6}$$

en posant

$$\xi = \xi - \overline{\xi}. \tag{15.7}$$

Nous allons nous intéresser maintenant aux propriétés stochastiques de l'erreur d'estimation ϵ.

15.2.2 - Erreur d'estimation.

Lemme 15.1 : Le système (15.5), (15.6) définit de façon unique ϵ , pour ξ et η donnés dans $E \times F$ et l'application

$$\{\xi\,,\,\eta\} \to \epsilon \text{ est linéaire et continue de } E \times F \to V. \tag{15.8}$$

Démonstration : Pour ξ et η donnés, il correspond de façon *unique* y et z par (15.1) et (15.2), donc une valeur unique de $\hat{y}$ et p par (15.3), d'où enfin une valeur unique de ϵ. L'application (15.8) est visiblement linéaire.

Montrons qu'elle est continue. Comme l'application $\{\xi\,,\,\eta\} \to \{y\,,\,z\}$ est continue, il suffit, pour obtenir le résultat de montrer que l'application $z \to \{\hat{y}\,,p\}$, définie par (15.3) est continue de $F \to V \times V$.

Or (15.3) est le système des équations d'Euler du problème de contrôle optimal suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \textit{min}\ J_z(\theta) = < Q^{-1}(\theta - \overline{\xi})\,,\,\theta - \overline{\xi} > + < R^{-1}\left(z - \mathscr{C}\,y(\theta)\right),\, z - \mathscr{C}\,y(\theta) > \\ A\,y(\theta) = f + B\,\theta\,. \end{array}\right\} \tag{15.9}$$

Le contrôle optimal $\hat{\theta}_z$ est défini par

$$\hat{\theta}_z = \overline{\xi} - Q\,B^*\,p. \tag{15.10}$$

Soit donc une suite $z_n \to z$ dans F, alors on a

$$J_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) = \inf_{\theta} J_{z_n}(\theta) \leqslant J_{z_n}(\hat{\theta}_z)\,, \tag{15.11}$$

et comme $J_{z_n}(\hat{\theta}_z) \underset{n \to +\infty}{\to} J_z(\hat{\theta}_z)$, on déduit de (15.11)

$$\textit{lim sup}\ J_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) \leqslant J_z(\hat{\theta}_z) = \inf_{\theta} J_z(\theta). \tag{15.12}$$

De l'expression de $J_z(\theta)$, on déduit alors que $\hat{\theta}_{z_n}$ demeure dans un borné de F. Soit donc, encore notée $\hat{\theta}_{z_n}$ une sous suite extraite faiblement convergente vers $\overline{\theta}$, d'après (15.9) $y(\hat{\theta}_{z_n}) \to y(\overline{\theta})$ faiblement dans V.

On déduit alors de (15.9)

$$J_z(\overline{\theta}) \leqslant \textit{lim inf}\ J_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n})\,, \tag{15.13}$$

et d'après (15.12), il en résulte que

$$\overline{\theta} = \hat{\theta}_z\,. \tag{15.14}$$

En raison de l'unicité de la limite, toute la suite $\hat{\theta}_{z_n} \to \hat{\theta}_z$ faiblement dans F. Mais comme, d'après (15.12) et (15.13), $J_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) \to J_z(\hat{\theta}_z)$, on a

$$\begin{array}{l} < Q^{-1}(\hat{\theta}_{z_n} - \hat{\theta}_z)\,,\,\hat{\theta}_{z_n} - \hat{\theta}_z > + < R^{-1}(z_n - \mathscr{C}\,y(\hat{\theta}_{z_n}) \\ - z + \mathscr{C}\,y(\hat{\theta}_z))\,,\,z_n - \mathscr{C}\,y(\hat{\theta}_{z_n}) \\ - z + \mathscr{C}\,y(\hat{\theta}_z) > \to 0, \end{array} \tag{15.15}$$

donc

$$\hat{\theta}_{z_n} \to \hat{\theta}_z \text{ fortement dans F,} \tag{15.16}$$

et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} y(\hat{\theta}_{z_n}) \to y(\hat{\theta}_z) = \hat{y} \\ p\left(y(\hat{\theta}_{z_n})\right) \to p\left(y(\hat{\theta}_z)\right) \end{array}\right\} \quad \textit{fortement} \text{ dans V,} \qquad \begin{array}{l} (15.17) \\ (15.18) \end{array}$$

ce qui démontre le lemme.

15.2.3 - **Caractéristiques de l'erreur.**

Au couple $\{ \xi , \eta \}$ est associée une mesure cylindrique sur l'espace $E \times F$, d'espérance mathématique $\{ 0 , 0 \}$ et d'opérateur de covariance $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Par conséquent, grâce au lemme (15.8), l'application (15.8) associe à l'erreur d'estimation ϵ, une mesure cylindrique sur V, d'espérance mathématique 0, et dont nous allons montrer qu'elle admet un opérateur de covariance que nous pouvons expliciter. Nous avons :

Proposition 15.1 : L'opérateur de covariance Λ de l'erreur ϵ est donné par

$$\Lambda = (A + D_1 A^{*-1} D_2)^{-1} D_1 A^{*-1} = A^{-1} D_1 (A^* + D_2 A^{-1} D_1)^{-1} . \qquad (15.19)$$

Démonstration : Nous pouvons expliciter l'application (15.8). De (15.6) on tire

$$p = A^{*-1} D_2 \epsilon - A^{*-1} \mathscr{C}^* R^{-1} \eta , \qquad (15.20)$$

et en portant dans (15.5), il vient

$$(A + D_1 A^{*-1} D_2) \epsilon = - B \xi + D_1 A^{*-1} \mathscr{C}^* R^{-1} \eta , \qquad (15.21)$$

et comme l'équation (15.21) possède une solution unique, l'opérateur

$$G = A + D_1 A^{*-1} D_2 \qquad (15.22)$$

est inversible (au moins dans un sous espace de V'). Par conséquent

$$\epsilon = - G^{-1} B \xi + G^{-1} D_1 A^{*-1} \mathscr{C}^* R^{-1} \eta . \qquad (15.23)$$

Soient alors $\varphi \in V'$ quelconque, on a

$$< \epsilon , \varphi > = - < \xi , B^* G^{*-1} \varphi > + < \eta , R^{-1} \mathscr{C} A^{-1} D_1 G^{*-1} \varphi > , \qquad (15.24)$$

d'où on déduit aisément

$$\begin{aligned} \Lambda &= G^{-1} D_1 G^{*-1} + G^{-1} D_1 A^{*-1} D_2 A^{-1} D_1 G^{*-1} \qquad (15.25) \\ &= G^{-1} D_1 (I + A^{*-1} D_2 A^{-1} D_1) G^{*-1} , \end{aligned}$$

et d'après (15.22)

$$\begin{aligned} &= G^{-1} D_1 A^{*-1} \\ &= A^{-1} D_1 G^{*-1} , \end{aligned}$$

ce qui démontre (15.19).

16 - Cas des systèmes paraboliques.

16.1 - Hypothèses - Notations. Rappels.

Nous reprenons les notations de (3.3). L'état du système est défini par

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} + A(t) y = f(t) + B(t) \xi(t) \\ y(0) = \zeta , \end{array}\right\} \qquad (16.1)$$

avec comme observation

$$z(t) = \mathscr{C}(t) y(t) + \eta(t). \qquad (16.2)$$

L'estimateur optimal de l'état du système à l'instant présent T est défini par

$$\hat{y}_T = y_T(T), \qquad (16.3)$$

où y_T est solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + A(t)\, y_T + D_1(t)\, p_T = f(t) + B(t)\, \overline{\xi}(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t)\, p_T - D_2(t)\, y_T = -\mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t) \\ &\quad y_T(0) = \overline{\zeta} - P_0\, p_T(0) \\ &\quad p_T(T) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16.4)$$

L'erreur d'estimation est alors définie par

$$\epsilon_T = \hat{y}_T - y(T). \quad (16.5)$$

Rappelons que P (T) est défini de la manière suivante : On considère le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + A(t)\, \beta + D_1(t)\, \gamma = 0 \\ &-\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\, \gamma - D_2(t)\, \beta = 0 \\ &\quad \beta(0) = -P_0\, \gamma(0) \\ &\quad \gamma(T) = h. \end{aligned}\right\} \quad (16.6)$$

Alors

$$\beta(T) = -P(T)\, h. \quad (16.7)$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés stochastiques de l'erreur ϵ_T.

16.2 - Erreur d'estimation.

Nous avons

Lemme 16.1 : L'application $z \to \hat{y}_T$ définie par (16.4) est affine continue de $L^2(0, T; F) \to H$.

Démonstration. Le système (16.4) correspond à la minimisation de : $(\theta = \xi, \zeta)$

$$\mathscr{L}_z(\theta) = \left(P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}\right) + \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)\left(z(t) - \mathscr{C}(t)\, y(t; \theta)\right), z(t) - \mathscr{C}(t)\, y(t; \theta) > dt \quad (16.8)$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt}(\theta) + A(t)\, y(\theta) = f + B\, \xi(t) \\ &\quad y(0; \theta) = \zeta. \end{aligned}\right\} \quad (16.9)$$

Le contrôle optimal est alors défini par

$$\hat{\theta}_z = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\xi}_z = \overline{\xi} - Q\, B^*\, p_T \\ \hat{\zeta}_z = \overline{\zeta} - P_0\, p_T(0) \end{array} \right. \quad (16.10)$$

et

$$y_T = y(\hat{\theta}_z). \quad (16.11)$$

Soit donc une suite $z_n \to z$ dans $L^2(0, T; F)$. Alors on a

$$\mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) = \inf_\theta \mathscr{L}_{z_n}(\theta) \leqslant \mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_z) \to \mathscr{L}_z(\hat{\theta}_z), \quad (16.12)$$

d'où

$$\limsup_{n \to +\infty} \mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) \leqslant \mathscr{L}_z(\hat{\theta}_z) = \inf_\theta \mathscr{L}_z(\theta). \quad (16.13)$$

De l'expression de $\mathscr{L}_z(\theta)$, on déduit que $\hat{\theta}_{z_n}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; E) \times H$. Soit donc, encore notée $\hat{\theta}_{z_n}$ une sous suite extraite faiblement convergente vers $\overline{\theta} = \{\overline{\zeta}, \overline{\xi}\}$.

D'après (16.9), $y(\hat{\theta}_{z_n}) \to y(\overline{\theta})$ faiblement dans W (0, T). On déduit alors de (16.8),

par passage à la limite inférieure,

$$\mathscr{L}_z(\overline{\theta}) \leqslant \liminf \mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}), \tag{16.14}$$

et d'après (16.13), il en résulte

$$\overline{\theta} = \hat{\theta}_z . \tag{16.15}$$

En raison de l'unicité de la limite, toute la suite $\hat{\theta}_{z_n} \to \hat{\theta}_z$ faiblement dans $L^2(0, T; E) \times H$. On raisonne après, comme pour le lemme 15.1. Du fait que $\mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) \to \mathscr{L}_z(\hat{\theta}_z)$, résulte que

$$\hat{\theta}_{z_n} \to \hat{\theta}_z \text{ fortement dans } L^2(0, T; E) \times H, \tag{16.16}$$

donc aussi

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(\hat{\theta}_{z_n}) \to \gamma(\hat{\theta}_z) = \gamma_{T,z} = \gamma_T \\ p(\gamma(\hat{\theta}_{z_n})) \to p(\gamma(\hat{\theta}_z)) \end{array}\right\} \quad \text{dans W (0, T) fortement,} \tag{16.17}$$

$$\tag{16.18}$$

soit

$$\hat{y}_{T,z_n} \to \hat{y}_{T,z} \text{ fortement dans H,} \tag{16.19}$$

ce qui démontre le lemme.

Corollaire 16.1. L'application

$$\{\xi, \zeta, \eta\} \to \epsilon_T \tag{16.20}$$

est affine continue de $L^2(0, T; E) \times H \times L^2(0, T; F) \to H$.

Démonstration : Immédiate à partir des formules (16.1), (16.2), (16.5) et du lemme 16.1.

16.3 - Caractéristiques stochastiques de l'erreur.

Nous avons associé au triplet $\{\xi, \zeta, \eta\}$ une mesure cylindrique sur l'espace $L^2(0, T; E) \times H \times L^2(0, T; F)$. Par application (16.20), il en résulte une mesure cylindrique image sur H. Nous avons

Théorème 16.1 : Hypothèses-Notations de 16.1. La mesure cylindrique sur H associée à l'erreur d'estimation ϵ_T a les caractéristiques suivantes

espérance mathématique = 0. (16.21)

opérateur de covariance = P (T). (16.22)

Démonstration

De (16.4), (16.6) on tire

$$0 = \int_0^T \left(\gamma_T, -\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\gamma - D_2(t)\beta \right) dt \tag{16.23}$$

$$= -(h, \hat{y}_T) + (\gamma(0), \gamma_T(0)) + \int_0^T \left\langle \gamma, \frac{dy_T}{dt} + A(t) y_T \right\rangle dt - \int_0^T \langle D_2 \gamma_T, \beta \rangle dt$$

d'où

$$(\hat{y}_T, h) = (\gamma(0), \gamma_T(0)) + \int_0^T \langle \gamma, f + B\overline{\xi} \rangle - \int_0^T \langle \gamma, D_1 p_T \rangle dt \tag{16.24}$$

$$- \left\{ \int_0^T \left\langle \beta, -\frac{dp_T}{dt} + A^*(t) p_T + \mathscr{C}^* R^{-1} z \right\rangle dt \right\}$$

$$= (\gamma(0), \overline{\zeta} - P_0 p_T(0)) + \int_0^T \langle \gamma, f + B\overline{\xi} \rangle dt - \int_0^T \langle \gamma, D_1 p_T \rangle dt$$

$$- \{ -(p_T(0), P_0 \gamma(0)) - \int_0^T \langle p_T, D_1 \gamma \rangle dt + \int_0^T \langle \beta, \mathscr{C}^* R^{-1} z \rangle dt \},$$

$$(\hat{y}_T, h) = (\gamma(0), \overline{\zeta}) + \int_0^T \langle \gamma, f + B\overline{\xi} \rangle dt - \int_0^T \langle \beta, \mathscr{C}^* R^{-1} z \rangle dt, \tag{16.25}$$

en remplaçant z par sa valeur tirée de (16.2), on obtient

$$(\hat{y}_T , h) = (\gamma (0) , \overline{\zeta}) + \int_0^T < \gamma , f + B \overline{\xi} > dt - \int_0^T < \beta , D_2 \gamma > dt - \int_0^T$$

$$< \beta , \mathscr{C}^* R^{-1} \eta > dt$$

$$= (\gamma (0) , \overline{\zeta}) + \int_0^T < \gamma , f + B \overline{\xi} > dt - \int_0^T < \gamma , -\frac{d\gamma}{dt} + A^* (t) \gamma > dt$$

$$- \int_0^T < \beta , \mathscr{C}^* R^{-1} \eta > dt , \qquad (16.26)$$

et grâce à (16.1), on obtient

$$(\hat{y}_T , h) = (\gamma (0) , \overline{\zeta}) + \int_0^T < \gamma , f + B \overline{\xi} > dt$$

$$- \{ + (\gamma (0) , \zeta) + \int_0^T < \gamma , f + B \xi > dt$$

$$- (h , \gamma (T) \} - \int_0^T < \beta , \mathscr{C}^* R^{-1} \eta > dt , \qquad (16.27)$$

d'où, en définitive, la formule

$$(\epsilon_T , h) = - (\gamma (0) , \zeta - \overline{\zeta}) - \int_0^T < B^* \gamma , \xi - \overline{\xi} > dt - \int_0^T < R^{-1} \mathscr{C} \beta , \eta > dt. \qquad (16.28)$$

Nous poserons

$$\tilde{\zeta} = \zeta - \overline{\zeta} \qquad (16.29)$$

$$\tilde{\xi} = \xi - \overline{\xi} \qquad (16.30)$$

et

γ_h , β_h désignent les solutions de (16.6), pour marquer la dépendance en h. *(16.31)*

D'où

$$(\epsilon_T , h) = (- \gamma_h (0) , \tilde{\zeta}) - \int_0^T < B^* \gamma_h , \tilde{\xi} > dt - \int_0^T < R^{-1} \mathscr{C} \beta_h , \eta > dt , \qquad (16.29)$$

l'espérance mathématique de $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\xi}$, η étant 0, il en résulte (16.21).

Si on désigne par Λ_T l'opérateur de covariance de ϵ_T , la formule (16.29) donne aussitôt, $\forall\, h , \overline{h} \in H$

$$(\Lambda_T h , \overline{h}) = (P_0 \gamma_h (0) , \gamma_{\overline{h}} (0)) + \int_0^T < Q (t) B^* \gamma_h , B^* \gamma_{\overline{h}} > dt \qquad (16.30)$$

$$+ \int_0^T < R (t) R^{-1} (t) \mathscr{C} \beta_h , R^{-1} \mathscr{C} \beta_{\overline{h}} > dt$$

$$= (P_0 \gamma_h (0) , \gamma_{\overline{h}} (0)) + \int_0^T < D_1 (t) \gamma_h , \gamma_{\overline{h}} > dt + \int_0^T < D_2 (t) \beta_h , \beta_{\overline{h}} > dt$$

$$= (P_0 \gamma_h (0) , \gamma_{\overline{h}} (0)) + \int_0^T < D_1 \gamma_h , \gamma_{\overline{h}} > dt + \int_0^T < -\frac{d\gamma_h}{dt} + A^* (t) \gamma_h , \beta_{\overline{h}} > dt$$

$$= (P_0 \gamma_h (0) , \gamma_{\overline{h}} (0)) + \int_0^T < D_1 \gamma_h , \gamma_{\overline{h}} > dt + (P (T) h , \overline{h}) - (P_0 \gamma_h (0) , \gamma_{\overline{h}} (0))$$

$$- \int_0^T < \gamma_h , D_1 \gamma_{\overline{h}} > dt ,$$

soit

$$(\Lambda_T h , \overline{h}) = (P (T) h , \overline{h}) \qquad \forall\, h , \overline{h} , \qquad (16.31)$$

ce qui démontre (16.22).

17 - Propriétés de l'opérateur de covariance P (T).

17.1 - Une propriété d'optimalité de P (T).

17.1.1 - Le problème - Hypothèses - Notations.

Nous considérons le système (cf. notations du n° 4)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = f(t) + B(t)\, \xi(t) \\ &y(0) = \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (17.1)$$

avec comme observation

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\, y(t) + \eta(t). \qquad (17.2)$$

Nous supposons

$$\mathscr{C}(t) \in \mathscr{L}(H ; F) \qquad \forall\, t \in [\,0\,,\,T\,]. \qquad (17.3)$$

Nous introduisons un opérateur *quelconque* $K(t) \in \mathscr{L}(F ; H)$, $t \in [0, T]$, tel que $\sup_{t \in [0, T]} \| K(t) \|_{\mathscr{L}(F; H)}$ soit borné.

A tout opérateur K nous associons la solution $e(t)$ de l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{de}{dt} + A(t)\, e = f(t) + B(t)\, \bar{\xi}(t) + K(t)\,\big(z(t) - \mathscr{C}(t)\, e(t)\big) \qquad t \in]0, T[\\ &e(0) = \bar{\zeta}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.4)$$

Notons que (17.4) possède une solution unique, pour K donné, puisque

$\sup_{t \in [0; T]} \| K(t)\, \mathscr{C}(t) \|_{\mathscr{L}(H; H)}$ est borné. Nous poserons

Définition 17.1 : On appelle « *Filtre* » (ou filtre de l'état $y(t)$) la solution de (17.4) correspondant à un opérateur K (t) donné. La valeur choisie de K (t) s'appelle *Gain du filtre* $e(t)$ ■

Nous pouvons donner tout de suite un exemple de filtre. Prenons en effet

$$K_0(t) = P(t)\, \mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t). \qquad (17.5)$$

On voit alors aisément, en explicitant (17.4), que l'on retombe sur l'équation (4.66) donnant l'estimateur optimal $r(t)$. Par conséquent $r(t)$ est un filtre correspondant à un gain défini par (17.5).

Nous allons nous intéresser maintenant à l'erreur $\epsilon(t)$ correspondant au filtre $e(t)$. Elle est définie par

$$\epsilon(t) = e(t) - y(t). \qquad (17.6)$$

On voit alors facilement, en utilisant (17.1), (17.2) et (17.4) que $\epsilon(t)$ est la solution de l'équation d'évolution

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\epsilon}{dt} + A(t)\, \epsilon + K(t)\, \mathscr{C}(t)\, \epsilon = -B(t)\, \tilde{\xi}(t) + K(t)\, \eta(t) \\ &\epsilon(0) = \tilde{\zeta}, \end{aligned}\right\} \qquad (17.7)$$

en posant

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \bar{\xi}(t) \qquad (17.8)$$

$$\tilde{\zeta} = \zeta - \bar{\zeta}. \qquad (17.9)$$

Considérons maintenant, plus précisément l'erreur ϵ (T) et soit Λ_K(T) son opérateur de covariance. Le problème que nous nous proposons d'étudier est alors le suivant : Trouver K*, s'il existe, de façon que l'on ait

$$(\Lambda_K (T)\, h, h) \geqslant (\Lambda_{K^*} (T)\, h, h), \forall\, h, \forall\, K. \qquad (17.10)$$

Orientation : Nous allons donner, tout d'abord, certaines propriétés de découplage, que nous utiliserons.

17.1.2 Propriétés de découplage.

On se donne une famille d'opérateurs $D(t)$, $t \in [0, T]$ vérifiant

$$\left.\begin{array}{l} D(t) \in \mathscr{L}(H; H), \forall\, t, \ \sup\limits_t \| D(t) \|_{\mathscr{L}(H; H)} \text{ borné} \\ D(t) \text{ autoadjoint positif.} \end{array}\right\} \qquad (17.11)$$

Soit h un élément quelconque de H. On considère le système

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\beta}{dt} + A(t)\beta + D(t)\gamma = 0 \\ -\dfrac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\gamma - \mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t) \mathscr{C}(t)\beta = 0 \\ \beta(0) = -P_0 \gamma(0) \\ \gamma(T) = h. \end{array}\right\} \qquad (17.12)$$

Le système (17.12) représente les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du problème de contrôle

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{dp}{dt} + A^*(t) p = \mathscr{C}^*(t) m(t) \qquad t \in]0, T[\\ p(T) = h \end{array}\right\}$$

où $m(t)$ est le contrôle, avec la fonction coût

$$J(m) = \int_0^T (R(t)\, m(t), m(t))\, dt + \int_0^T (D(t)\, p(t), p(t))\, dt + (P_0\, p(0), p(0)).$$

Dans ces conditions le système (17.12) se découple, et on a :

$$\beta(t) = -\Pi(t)\gamma(t), t \in]0, T[\qquad (17.13)$$

où $\Pi(t)$ est solution de l'équation de Riccati,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(\Pi\varphi) + \Pi\left(-\dfrac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi\right) + \Pi \mathscr{C}^* R^{-1} \mathscr{C} \Pi + A \Pi \varphi = D\varphi \\ \Pi(0) = P_0 \end{array}\right\} \qquad (17.14)$$

$\forall\, \varphi \in W(0, T)$ vérifiant $-\dfrac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi \in L^2(0, T; H)$.

Un cas particulier important de (17.12), (17.14) est celui où $\mathscr{C}(t) = 0$ [1]. On considère alors le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_1}{dt} + A(t)\beta_1 + D(t)\gamma_1 = 0 \\ &-\frac{d\gamma_1}{dt} + A^*(t)\gamma_1 = 0 \\ &\beta_1(0) = -P_0\gamma_1(0) \\ &\gamma_1(T) = h. \end{aligned}\right\} \quad (17.15)$$

On a alors

$$\beta_1(t) = -\Lambda(t)\gamma_1(t) \quad , t \in [0, T], \quad (17.16)$$

où $\Lambda(t)$ est solution de l'équation de Riccati

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\Lambda\varphi) + \Lambda\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi\right) + A\Lambda\varphi = D\varphi \\ &\Lambda(0) = P_0. \end{aligned}\right\} \quad (17.17)$$

Nous allons maintenant donner une autre formulation de $\Lambda(t)$, qui nous sera utile pour la suite. Nous introduisons pour cela, l'opérateur de Green associé à $A(t)$, soit $G(t, \tau)$ [2] (cf. [35]). Nous avons alors, en utilisant les deuxième et quatrième équations (17.15)

$$\gamma_1(t) = G^*(T, t)h,$$

puis en utilisant les première et troisième équations (17.15), on obtient

$$\beta_1(t) = -G(t, 0)P_0\gamma_1(0) - \int_0^t G(t, \tau)D(\tau)G^*(T, \tau)h\,d\tau,$$

soit

$$\beta_1(T) = -\Lambda(T)h$$
$$= -G(T,0)P_0G^*(T,0)h - \left(\int_0^T G(T, \tau)D(\tau)G^*(T, \tau)\,d\tau\right)h$$

d'où, puisque h est quelconque

$$\Lambda(T) = G(T, 0)P_0G^*(T, 0) + \int_0^T G(T, \tau)D(\tau)G^*(T, \tau)\,d\tau.$$

On voit aisément que T ne joue qu'un rôle d'intermédiaire, et que finalement la solution unique $\Lambda(t)$ de (17.17) [3] est donnée par

$$\Lambda(t) = G(t, 0)P_0G^*(t, 0) + \int_0^t G(t, \tau)D(\tau)G^*(t, \tau)\,d\tau. \quad (17.8)$$

17.1.3 Théorème d'optimalité.

Nous allons montrer que K_0 défini en (17.5) répond au problème posé en (17.10). Plus précisément, nous avons

Théorème 17.1 : Hypothèses - Notations de 17.1.1. Parmi tous les gains $K(t)$ possibles, il en existe un et un seul $K^*(t)$, vérifiant (17.10), et $K^*(t)$ n'est autre que le gain $K_0(t)$ défini par (17.5).

---

(1) à dire vrai, sans référence cette fois, à la théorie du contrôle.
(2) Nous en rappelerons les propriétés essentielles au n° 17.2.2.
(3) dans son intervalle de définition.

Démonstration du théorème 17.1.

Pour démontrer le théorème 17.1, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 17.1 : Si Γ (T) représente l'opérateur de covariance de l'état y (T) du système (17.1), à l'instant T, on a la formule :

$$\Gamma(T) = G(T,0)\, P_0\, G^*(T,0) + \int_0^T G(T,\tau)\, B(\tau)\, Q(\tau)\, B^*(\tau)\, G^*(T,\tau)\, d\tau. \qquad (17.19)$$

Démonstration :

Soit $h \in H$ quelconque, et ψ_h solution de

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\psi_h}{dt} + A^*(t)\,\psi_h = 0 \quad &, t \in]0,T[\\ \psi_h(T) = h. & \end{aligned}\right\} \qquad (17.20)$$

On a, en utilisant (17.1) et (17.20), grâce à l'intégration par parties

$$0 = \int_0^T \left(y, -\frac{d\psi_h}{dt} + A^*(t)\,\psi_h \right) dt$$

$$= -\left(h, y(T)\right) + \left(\psi_h(0), y(0)\right) + \int_0^T \left(\psi_h(t), f(t)\right) dt + \int_0^T \left(\psi_h(t), B(t)\,\xi(t)\right) dt,$$

d'où

$$\left(y(T), h\right) = \int_0^T \left(f(t), \psi_h(t)\right) dt + \int_0^T \left(\xi(t), B^*(t)\,\psi_h(t)\right) dt + \left(\psi_h(0), \zeta\right)$$

D'après les propriétés stochastiques (3.9) de ξ, ζ, il en résulte

$$\left(\Gamma(T)\,h, h'\right) = \left(P_0\,\psi_h(0), \psi_{h'}(0)\right) + \int_0^T \left(Q(t)\,B^*(t)\,\psi_h(t), B^*(t)\,\psi_{h'}(t)\right) dt. \qquad (17.21)$$

Si on remarque que

$$\psi_h(t) = G^*(T,t)\,h,$$

la formule (17.19) résulte alors aisément de (17.21).

Corollaire 17.1 :

L'opérateur de covariance Γ (T) est solution de l'équation de Riccati

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\Gamma(t)\,\varphi(t)\right) + \Gamma(t)\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\,\varphi\right) + A(t)\,\Gamma(t)\,\varphi = B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\varphi \\ &\Gamma(0) = P_0 \\ &\forall\, \varphi \in W(0,T), \text{ vérifiant } -\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\,\varphi \in L^2(0,T;H). \end{aligned}\right\} \qquad (17.22)$$

Démonstration :

Conséquence immédiate du lemme 17.1 et du n° 17.1.2.

Lemme 17.2.

L'opérateur Π (t) solution de (17.14) vérifie

$$\left.\begin{aligned} &\left(\Pi(T)\,h, h\right) = \left(P_0\,y(0), y(0)\right) + \int_0^T \left(D(t)\,y(t), y(t)\right) dt \\ &+ \int_0^T \left(\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Pi(t)\,y(t), \Pi(t)\,y(t)\right) dt. \end{aligned}\right\} \qquad (17.23)$$

Démonstration.

Les équations (17.12) donnent

$$\int_0^T \left(\beta, -\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\gamma - \mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) \beta \right) dt = 0$$

$$= (\Pi(T) h, h) + \int_0^T (D(t)\gamma, \gamma)\, dt - \int_0^T (\mathscr{C}^*(t) R^{-1}(t) \mathscr{C}(t) \beta, \beta)\, dt$$

$$- (P_0 \gamma(0), \gamma(0)),$$

et tenant compte de (17.13), il en résulte alors (17.23).

Suite de la démonstration du théorème 17.1.

Soit donc $\Lambda_K(T)$ l'opérateur de covariance de l'erreur $\epsilon(T)$ définie par (17.7). Il est clair que la situation pour le calcul de $\Lambda_K(T)$ est analogue à celle du lemme (17.1) (on peut adapter simplement la démonstration). Par conséquent $\Lambda_K(T)$ est défini par l'équation de Riccati

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_K \varphi) + \Lambda_K \left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi + \mathscr{C}^*(t) K^*(t) \varphi \right)$$

$$+ \left(\Lambda(t) + K(t) \mathscr{C}(t)\right) \Lambda_K \varphi = B(t) Q(t) B^*(t) \varphi$$

$$+ K(t) R(t) K^*(t) \varphi \qquad (17.24)$$

$$\Lambda_K(0) = P_0$$

$\forall \varphi \in W(0, T)$, vérifiant $-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi \in L^2(0, T; H)$.

Des calculs algébriques simples montrent que (17.24) est équivalent à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\Lambda_K \varphi) + \Lambda_K \left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi \right) + \Lambda_K \mathscr{C}^* R^{-1} \mathscr{C} \Lambda_K \varphi \\ &= BQB^* \varphi + (K - \Lambda_K \mathscr{C}^* R^{-1}) R (K^* - R^{-1} \mathscr{C} \Lambda_K) \varphi \\ &\Lambda_K(0) = P_0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.25)$$

Posons

$$\sum_K(t) = (K - \Lambda_K \mathscr{C}^* R^{-1}) R (K^* - R^{-1} \mathscr{C} \Lambda_K).$$

L'opérateur $\sum_K(t)$ appartient à $\mathscr{L}(H; H)$, et est autoadjoint, défini positif. Supposons Λ_K connu, alors nous pouvons considérer l'équation de Riccati (17.14) avec

$$D(t) = B(t) Q(t) B^*(t) + \sum_K(t),$$

qui possède une solution et une seule, et nous constatons, d'après (17.25), que cette solution n'est autre que $\Lambda_K(t)$. D'après 17.1.2, il existe β_2 et $\gamma_2 \in W(0, T)$, solutions de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_2}{dt} + A(t)\beta_2 + (BQB^* + \sum_K)\gamma_2 = 0 \\ &-\frac{d\gamma_2}{dt} + A^*(t)\gamma_2 - \mathscr{C}^* R^{-1} \mathscr{C} \beta_2 = 0 \\ &\beta_2(0) = -P_0 \gamma_2(0) \\ &\gamma_2(T) = h, \end{aligned}\right\}$$

et l'on a

$$\beta_2(t) = -\Lambda_K(t)\,\gamma_2(t) \qquad t \in [0, T].$$

D'après le lemme 17.2, on a alors

$$\left.\begin{aligned}
&(\Lambda_K(T)\,h, h) = (P_0\,\gamma_2(0)) + \int_0^T (B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\gamma_2(t), \gamma_2(t))\,dt \\
&+ \int_0^T (\Sigma_K(t)\,\gamma_2(t), \gamma_2(t))\,dt + \int_0^T (\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_K(t)\,\gamma_2(t), \\
&\Lambda_K(t)\,\gamma_2(t))\,dt \geqslant (P_0\,\gamma_2(0), \gamma_2(0)) + \int_0^T (B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\gamma_2(t), \gamma_2(t))\,dt \\
&+ \int_0^T (\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_K(t)\,\gamma_2(t), \Lambda_K(t)\,\gamma_2(t))\,dt
\end{aligned}\right\} \quad (17.26)$$

et $\gamma_2(t)$ peut se définir par

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{d\gamma_2}{dt} + (A^*(t) + \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_K(t))\,\gamma_2 = 0 \\
&\gamma_2(T) = h.
\end{aligned}\right\} \quad (17.27)$$

Remarquons maintenant, que pour $P(t)$ et $K_0(t)$ définis par (17.5), on a

$$\Sigma_{K_0}(t) = 0$$

$$\Lambda_{K_0}(t) = P(t),$$

et il existe alors β et $\gamma \in W(0, T)$, définis de façon unique par le système

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta + B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\gamma = 0 \\
&-\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\,\gamma - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\beta = 0 \\
&\beta(0) = -P_0\,\gamma(0) \\
&\gamma(T) = h
\end{aligned}\right\} \quad (17.28)$$

et

$$\beta(t) = -P(t)\,\gamma(t).$$

D'après le lemme 17.2, on a alors

$$\left.\begin{aligned}
&(P(T)\,h, h) = (P_0\,\gamma(0), \gamma(0)) + \int_0^T (B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\gamma(t), \gamma(t))\,dt \\
&+ \int_0^T (\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,P(t)\,\gamma(t), P(t)\,\gamma(t))\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (17.28)$$

De (17.27) et (17.28), on déduit

$$0 = \int_0^T \left(\beta, -\frac{d\gamma_2}{dt} + A^*(t)\,\gamma_2\right)\,dt + \int_0^T dt\,(\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_K(t)\,\gamma_2(t), \beta(t))\,dt$$

soit

$$\left.\begin{aligned}
&(P(T)\,h, h) = (P_0\,\gamma(0), \gamma_2(0)) + \int_0^T (B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\gamma(t), \gamma_2(t))\,dt \\
&+ \int_0^T (\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_K(t)\,\gamma_2(t), P(t)\,\gamma(t))\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (17.28)$$

Posons alors

$$\rho = (P_0(\gamma(0) - \gamma_2(0)), \gamma(0) - \gamma_2(0))$$

$$+ \int_0^T \left(B(t)\, Q(t)\, B^*(t) \left(\gamma(t) - \gamma_2(t)\right), \gamma(t) - \gamma_2(t) \right) dt$$

$$+ \int_0^T \left(\mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, \mathscr{C}(t) \left(\Lambda_K(t)\, \gamma_2(t)\right.\right.$$

$$\left.\left. - P(t)\, \gamma(t) \right), \Lambda_K(t)\, \gamma_2(t) - P(t)\, \gamma(t) \right) dt ;$$

ρ est évidemment positif ou nul. Si nous développons φ, nous obtenons en raison de (17.28)′ et (17.28)″

$$\rho = \left(P(T)\, h, h\right) - 2\left(P(T)\, h, h\right) + \left(P_0\, \gamma_2(0), \gamma_2(0)\right)$$

$$+ \int_0^T dt \left(B(t)\, Q(t)\, B^*(t)\, \gamma_2(t), \gamma_2(t)\right) dt$$

$$+ \int_0^T dt \left(\mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, \mathscr{C}(t)\, \Lambda_K(t)\, \gamma_2(t), \Lambda_K(t)\, \gamma_2(t)\right),$$

d'où

$$\left(P_0\, \gamma_2(0), \gamma_2(0)\right) + \int_0^T dt \left(B(t)\, Q(t)\, B^*(t)\, \gamma_2(t), \gamma_2(t)\right) dt$$

$$+ \int_0^T dt \left(\mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, \mathscr{C}(t)\, \Lambda_K(t)\, \gamma_2(t), \Lambda_K(t)\, \gamma_2(t)\right) \geqslant \left(P(T)\, h, h\right),$$

et en comparant à (17.26), on obtient

$$\left(\Lambda_K(T)\, h, h\right) \geqslant \left(P(T)\, h, h\right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 17.1.

17.2 - Etude du cas particulier B = 0.

17.2.1 - Hypothèses - Notations.

Nous considérons le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = f(t) \\ &y(0) = \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (17.29)$$

avec comme observation

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\, y(t) + \eta(t). \qquad (17.30)$$

Les hypothèses sont identiques à celles de 17.1.1. Notons que dans le modèle (17.29), l'équation d'évolution définissant l'état du système est connue. Seuls ont une nature stochastique, l'état initial et l'observation.

Le critère des moindres carrés s'applique. Il est défini par la fonctionnelle

$$\mathscr{L}(\zeta) = \left(P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}\right) \qquad (17.30)$$

$$+ \int_0^T dt \left(R^{-1}(t) \left(z(t) - \mathscr{C}(t)\, y(t\,;\zeta)\right), z(t) - \mathscr{C}(t)\, y(t\,;\zeta)\right)$$

de sorte que l'estimateur optimal $\hat{y}_T$ de l'état $y(T)$ s'obtient de la manière suivante : On résout

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + A(t)\, y_T = f(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t)\, p_T - D_2(t)\, y_T = -\mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t) \\ &y_T(0) = \overline{\zeta} - P_0\, p_T(0) \\ &p_T(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17.31)$$

et

$$\hat{y}_T = y_T(T). \tag{17.32}$$

Le système (17.31) se découple normalement. On a

$$y_T(t) = r_1(t) - P_1(t)\, p_T(t), \tag{17.33}$$

où $P_1(t)$ est la solution de l'équation de Riccati

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\,(P_1\varphi) + P_1\left(-\dfrac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\,\varphi\right) + A\,P_1\varphi + P_1 D_2 P_1 \varphi = 0 \\ P_1(0) = P_0 \end{array}\right\} \tag{17.34}$$

$\forall\, \varphi \in L^2(0, T; V)$, telle que $-\dfrac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\,\varphi \in L^2(0, T; H)$,

et $r_1(t)$ (noter que $\hat{y}_T = r_1(T)$) solution de

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dr_1}{dt} + Ar_1 + P_1 D_2 r = P_1\, \mathscr{C}^*\, R^{-1} z + f(t) \\ r_1(0) = \overline{\zeta}. \end{array}\right\} \tag{17.35}$$

Nous pouvons nous intéresser, comme en 17.1.1 aux filtres $e(t)$ définis par

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{de}{dt} + A\,e + \Pi\, D_2\, e = \Pi\, \mathscr{C}^*\, R^{-1} z + f(t) \\ e(0) = \overline{\zeta}, \end{array}\right\} \tag{17.36}$$

où Π est autoadjoint, défini $> 0 \in \mathscr{L}(H; H)$. Nous avons évidemment, l'analogue du théorème 17.1.

17.2.2 - **Autre forme pour $P_1(T)$.**

L'opérateur $P_1(T)$ s'obtient par application du système (16.6), soit

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\beta_1}{dt} + A(t)\,\beta_1 = 0. \\ -\dfrac{d\gamma_1}{dt} + A^*(t)\,\gamma_1 - D_2(t)\,\beta_1 = 0 \\ \beta_1(0) = -P_0\,\gamma_1(0) \\ \gamma_1(T) = h. \end{array}\right\} \tag{17.37}$$

et

$$\beta_1(t) = -P_1(t)\,\gamma_1(t) \tag{17.38}$$

$$\beta_1(T) = -P_1(T)\,h. \tag{17.39}$$

Nous introduisons alors l'opérateur de Green $G(t, \tau)$ associé à $A(t)$ (cf. [34]).

Nous avons $G(t, \tau) \in \mathscr{L}(H, H)$ et

$$t \to G(t, \tau) f \text{ est continue de } [\,\tau, T\,] \text{ dans H, } \forall f \in H \tag{17.40}$$

$$\frac{d}{dt} G(t, \tau) + A(t)\, G(t, \tau) = I \otimes \delta_\tau. \tag{17.41}$$

Enfin la solution $y_\tau(t; \xi)$ de l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} + A(t)\,y = 0 \qquad t \in\,]\,\tau, T\,[\\ y(\tau) = \xi \in H \end{array}\right\} \tag{17.42}$$

est donnée par

$$y_\tau (t ; \xi) = G (t , \tau) \xi . \qquad (17.43)$$

Dans (17.37), on a alors

$$\beta_1 (t) = - G (t , 0) P_0 \gamma_1 (0) \qquad (17.44)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} - \frac{d\gamma_1}{dt} + A^* (t) \gamma_1 &= - D_2 (t) G (t , 0) P_0 \gamma_1 (0) \\ \gamma_1 (T) &= h , \end{aligned} \right\} \qquad (17.45)$$

ce qui donne

$$\gamma_1 (0) = G^* (T , 0) h - \left(\int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \right) P_0 \gamma_1 (0) , \qquad (17.46)$$

d'où

$$\left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt \right) P_0 \gamma_1 (0) = G^* (T, 0) h. \qquad (17.47)$$

Or $\int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt$ est un opérateur défini positif. Comme P_0^{-1} est inversible, il en résulte que $P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt$ est également inversible. Par conséquent, on déduit de (17.46)

$$P_0 \gamma_1 (0) = \left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt \right)^{-1} G^* (T, 0) h , \qquad (17.48)$$

et grâce à (17.44)

$$\beta_1 (T) = - G (T, 0) \left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt \right)^{-1} G^* (T, 0) h \qquad (17.49)$$

soit, d'après (17.39)

$$P_1 (T) h = G (T, 0) \left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt \right)^{-1} G^* (T, 0) h, \qquad (17.50)$$

d'où puisque h est quelconque

Proposition 17.1 : Dans le cas B = 0, l'opérateur optimal $P_1 (T)$ est donné par

$$P_1 (T) = G (T, 0) \left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt \right)^{-1} G^* (T, 0). \qquad (17.51)$$

17.2.3 - Estimateur de l'état initial.

Nous nous sommes toujours intéressés, dans ce qui précède à l'estimateur $\hat{y}_T$ de l'état *présent* y (T) du système étudié. Dans le cas du système (17.29), il est possible d'obtenir des résultats sur l'estimateur optimal à l'instant présent T, *de l'état initial* y (0) du système. L'estimateur optimal $\hat{y}_0$ (T) à l'instant T, de l'état initial y (0) est défini par la solution y_T (0) de (17.31), soit

$$\hat{y}_0 (T) = y_T (0). \qquad (17.52)$$

L'erreur d'estimation correspondante est définie par

$$\hat{\epsilon}_0 (T) = \hat{y}_0 (T) - \zeta. \qquad (17.53)$$

Nous allons expliciter $\hat{\epsilon}_0$ (T). Posons

$$s (t) = y_T (t) - y (t). \qquad (17.54)$$

Il est clair que

$$\hat{\epsilon}_0 (T) = s (0). \qquad (17.55)$$

Or on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{ds}{dt} + A (t)\, s = 0 \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^* (t)\, p_T - D_2 (t)\, s (t) = - \mathscr{C}^* (t)\, R^{-1} (t)\, \eta (t) \\ &\quad s (0) = - \zeta - P_0\, p_T (0) \qquad (\zeta \text{ défini en (17.9)}) \\ &\quad p_T (T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.56)$$

On déduit alors de (17.56)

$$s (t) = - G (t , 0) \left(\zeta + P_0\, p_T (0)\right), \qquad (17.57)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_T}{dt} + A^* (t)\, p_T = - D_2 (t)\, G (t , 0) \left(\zeta + P_0\, p_T (0)\right) - \mathscr{C}^* (t)\, R^{-1} (t)\, \eta (t) \\ &\quad p_T (T) = 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (17.58)$$

soit

$$p_T (0) = \int_0^T G^* (t , 0) \left[- D_2 (t)\, G (t , 0) \left(\zeta + P_0\, p_T (0)\right) - \mathscr{C}^* (t)\, R^{-1} (t)\, \eta (t) \right] dt , \qquad (17.59)$$

d'où en utilisant la troisième équation (17.56), il vient

$$- P_0^{-1}\, s (0) - P_0^{-1}\, \zeta = \left(\int_0^T G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right) s (0) \qquad (17.60)$$

$$- \int_0^T G^* (t , 0)\, \mathscr{C}^* (t)\, R^{-1} (t)\, \eta (t)\, dt ,$$

d'où finalement, en raison de (17.55)

$$\hat{\epsilon}_0 (T) = \left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right)^{-1} \left\{ - P_0^{-1}\, \zeta \right. \qquad (17.61)$$

$$\left. + \int_0^T G^* (t , 0)\, \mathscr{C}^* (t)\, R^{-1} (t)\, \eta (t)\, dt \right\}.$$

La relation (17.61) montre alors qu'à $\hat{\epsilon}_0 (T)$ est associée une mesure cylindrique d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance $\Lambda_0 (T)$ défini par

$$\begin{aligned} \Lambda_0 (T) = &\left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right)^{-1} \qquad (17.62) \\ &\left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right) \\ &\left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right)^{-1} \\ = &\left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer

Proposition 17.2 : L'erreur d'estimation, à l'instant présent T, de l'état initial y (0) du système (17.29) suit une mesure cylindrique [1] d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance défini par (17.62).

Corollaire 17.2 : L'opérateur de covariance Λ_0 (T) est une fonction décroissante de T.

Démonstration : Montrons que

$$\left(P_0^{-1} + \int_0^{T_1} G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right)^{-1} \qquad (17.63)$$

$$\leqslant \left(P_0^{-1} + \int_0^{T_2} G^* (t , 0)\, D_2 (t)\, G (t , 0)\, dt \right)^{-1} ,$$

(1) par analogie avec « une v. a. suit une loi de probabilité ».

pour $T_1 \geqslant T_2$. Posons

$$M_{T_1} = P_0^{-1} + \int_0^{T_1} G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt \tag{17.64}$$

et une définition analogue pour M_{T_2}. Puis

$$M_{T_1 , T_2} = \int_{T_2}^{T_1} G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt . \tag{17.65}$$

Soit $\varphi \in H$ quelconque, posons

$$\psi_{T_1} = \left(M_{T_2} + M_{T_1 , T_2}\right)^{-1} \varphi = M_{T_1}^{-1} \varphi . \tag{17.66}$$

Nous avons puisque M_{T_1 , T_2} et M_{T_2} sont définis positifs

$$\left(M_{T_1 , T_2} \psi_{T_1} , \psi_{T_1}\right) \tag{17.67}$$
$$+ \left(M_{T_2}^{-1} M_{T_1 , T_2} \psi_{T_1} , M_{T_1 , T_2} \psi_{T_1}\right) \geqslant 0 ,$$

soit

$$\left(M_{T_1 , T_2} \psi_{T_1} , (I + M_{T_2}^{-1} M_{T_1 , T_2}) \psi_{T_1}\right) \geqslant 0 , \tag{17.68}$$

d'où

$$\left(M_{T_2}^{-1} M_{T_1 , T_2} \psi_{T_1} , (M_{T_2} + M_{T_1 , T_2}) \psi_{T_1}\right) \geqslant 0 , \tag{17.69}$$

soit

$$\left((I + M_{T_2}^{-1} M_{T_1 , T_2}) \psi_{T_1} , (M_{T_2} + M_{T_1 , T_2}) \psi_{T_1}\right) \tag{17.70}$$
$$\geqslant \left(\psi_{T_1} , (M_{T_2} + M_{T_1 , T_2}) \psi_{T_1}\right) ,$$

c'est-à-dire

$$\left(M_{T_2}^{-1} \varphi , \varphi\right) \geqslant \left(M_{T_1}^{-1} \varphi , \varphi\right) \tag{17.71}$$

soit (17.63).

Remarque 17.1 : Comme conséquence du corollaire 17.1, on a

$$\left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0) \, dt\right)^{-1} \leqslant P_0 . \tag{17.72}$$

L'interprétation statistique de (17.63) et (17.72) est aisée. En effet lorsque $T = 0$, c'est-à-dire avant toute observation, le meilleur estimateur de l'état initial y (0) du système, soit $\hat{y}_0$ (0) est $\bar{\zeta}$, et l'opérateur de covariance de l'erreur ainsi commise est P_0 (ceci s'établit sans difficultés). Au fur et à mesure que le temps avance et que l'observation devient plus abondante, la connaissance sur l'état initial devient plus précise, et par conséquent l'opérateur de covariance de l'erreur d'estimation commise diminue.

Remarque 17.2 : L'opérateur de covariance de l'erreur $\hat{\epsilon}_0$ (T) d'estimation de l'état initial ne se déduit pas automatiquement de l'opérateur de covariance P_1 (T) de l'erreur d'estimation ϵ (T) de l'état présent. En effet, nous avons entre les estimateurs respectifs la relation

$$\hat{y}_T = G (T, 0) \hat{y}_0 + \int_0^T G (T, t) \, f(t) \, dt . \tag{17.73}$$

d'où entre les erreurs correspondantes la relation

$$\epsilon (T) = G (T, 0) \hat{\epsilon}_0 (T) \tag{17.74}$$

ce qui implique entre les opérateurs de covariance P_1 (T) et Λ_0 (T) la relation

$$P_1 (T) = G (T, 0) \Lambda_0 (T) G^* (T, 0) , \tag{17.75}$$

ce qui permet d'écrire, compte tenu de (17.51)

$$G (T, 0) \left\{ \Lambda_0 (T) - \left(P_0^{-1} + \int_0^T G^* (t , 0) D_2 (t) G (t , 0 \, dt)^{-1} \right\} G^* (T, 0) = 0 \right. \tag{17.76}$$

ce qui n'implique pas (17.62). Le phénomène est lié au caractère d'*irreversibilité* de l'équation parabolique définissant l'état du système (autrement dit G (T, 0) n'est pas *inversible*).

17.3 - Autres propriétés de P (T) et P_1 (T).

17.3.1 - Comparaison de P (T) et P_1 (T).

Considérons les systèmes

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta + D_1(t)\,\gamma = 0 \\ -&\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\,\gamma - D_2(t)\,\beta = 0 \\ &\beta(0) = -P_0\,\gamma(0) \\ &\gamma(T) = h \end{aligned}\right\} \quad (17.77)$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_1}{dt} + A(t)\,\beta_1 = 0 \\ -&\frac{d\gamma_1}{dt} + A^*(t)\,\gamma_1 - D_2(t)\,\beta_1 = 0 \\ &\beta_1(0) = -P_0\,\gamma_1(0) \\ &\gamma_1(T) = h. \end{aligned}\right\} \quad (17.78)$$

On a alors

$$\beta(T) = -P(T)\,h \quad (17.79)$$

$$\beta_1(T) = -P_1(T)\,h. \quad (17.80)$$

Le système (17.77) correspond aux équations d'Euler du problème de contrôle optimal suivant :

Minimiser $(\theta = (u, v))$

$$\mathscr{L}(\theta) = (P_0^{-1} v, v) + \int_0^T \langle Q^{-1}(t)\,u(t), u(t)\rangle\,dt \quad (17.81)$$
$$+ \int_0^T \langle R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\beta(t;\theta), \mathscr{C}(t)\,\beta(t;\theta)\rangle\,dt$$
$$+ 2\,(h, \beta(T;\theta))$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + A(t)\,\beta = B(t)\,u(t) \\ &\beta(0) = v. \end{aligned}\right\} \quad (17.82)$$

Le système (17.18) correspond aux équations d'Euler du problème de contrôle optimal suivant :

Minimiser

$$J(v) = (P_0^{-1} v, v) + \int_0^T \langle R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\beta_1(t;v), \mathscr{C}(t)\,\beta_1(t;v)\rangle\,dt \quad (17.82)$$
$$+ 2\,(h, \beta_1(T;v))$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_1}{dt} + A(t)\,\beta_1 = 0 \\ &\beta_1(0) = v. \end{aligned}\right\} \quad (17.83)$$

Le contrôle optimal du problème (17.81), (17.82) est donné par $\hat{\theta} = (\hat{u}, \hat{v})$, où

$$\left.\begin{aligned} &\hat{u}(t) = -Q\,B^*\,\gamma(t) \\ &\hat{v} = -P_0\,\gamma(0), \end{aligned}\right\} \quad (17.84)$$

et la valeur optimale du critère est

$$\mathscr{L}(\hat{\theta}) = (h, \beta(T;\hat{\theta})) = -(P(T)\,h, h). \quad (17.85)$$

De façon identique le contrôle optimal du problème (17.82), (17.83) est fourni par

$$\hat{v}_1 = - P_0 \gamma_1 (0) , \tag{17.86}$$

et la valeur optimale du critère est

$$J (\hat{v}_1) = (h, \beta_1 (T; \hat{v}_1)) = - (P_1 (T) h, h). \tag{17.87}$$

Remarquons que l'on a

$$J (v) = \mathscr{L} (0 , v) \qquad (u = 0) , \forall v \tag{17.88}$$

d'où

$$\inf_v J (v) \geqslant \inf_{\theta} \mathscr{L} (\theta) \tag{17.89}$$

d'où

$$(P (T) h , h) \geqslant (P_1 (T) h , h). \tag{17.90}$$

Proposition 17.3 : Entre les opérateurs de covariance P (T) et P_1 (T), optimaux respectivement pour les sytèmes (16.1), (16.2) et (17.29), (17.30), on a la relation (17.90).

Remarque 17.3 : La relation (17.90) se comprend aisément du fait que le système (17.29), (17.30) est *mieux connu* que le système (16.1), (16.2).

17.3.2 - Majorations vérifiées par P (T) et P_1 (T).

Considérons l'équation de Riccati (5.49) vérifiée par P (T) et prenons φ tel que

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\varphi}{dt} + A^* (t) \varphi = 0 \\ \varphi (T) = h. \end{aligned}\right\} \tag{17.91}$$

L'équation (5.49) donne

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P \varphi) + P D_2 P \varphi + A P \varphi = D_1 \varphi \\ P (0) = P_0 , \end{aligned}\right\} \tag{17.92}$$

soit

$$< \frac{d}{dt} (P \varphi) , \varphi > + (P D_2 P\varphi , \varphi) + < A P \varphi , \varphi > = < D_1 \varphi , \varphi > . \tag{17.93}$$

Intégrons entre 0 et T la relation (17.93), il vient

$$(P (T) h , h) - (P_0 \varphi (0) , \varphi (0)) + \int_0^T < A P \varphi , \varphi > dt + \int_0^T (P D_2 P \varphi , \varphi) dt \tag{17.94}$$
$$- \int_0^T < P \varphi , A^* \varphi > dt = \int_0^T < D_1 \varphi , \varphi > dt ,$$

d'où la relation

$$(P (T) h , h) = (P_0 \varphi (0) , \varphi (0)) \tag{17.95}$$
$$+ \int_0^T < D_1 (t) \varphi (t) , \varphi (t) > dt - \int_0^T (P (t) D_2 (t) P (t) \varphi (t) , \varphi (t)) dt .$$

Quant à P_1 (T), il vérifie la même relation avec $D_1 = 0$, soit

$$(P_1 (T) h , h) = (P_0 \varphi (0) , \varphi (0)) - \int_0^T (P_1 (t) D_2 (t) P_1 (t) \varphi (t) , \varphi (t)) dt . \tag{17.96}$$

D'où les majorations

$$(P (T) h, h) \leqslant (P_0 \varphi (0), \varphi (0)) + \int_0^T < D_1 (t) \varphi (t), \varphi (t) > dt \tag{17.97}$$

$$(P_1 (T) h, h) \leqslant (P_0 \varphi (0), \varphi (0)), \tag{17.98}$$

et puisque $\varphi (t) = G^* (T, t) h$, on obtient

Proposition 17.4 : Les opérations de covariance optimaux P (T) et P_1 (T) vérifient les majorations suivantes :

$$\left(P(T)\,h, h\right) \leqslant \left(G(T,0)\,P_0\,G^*(T,0)\,h, h\right) \qquad (17.99)$$
$$+ \left(\left[\int_0^T G(T,t)\,D_1(t)\,G^*(T,t)\,dt\right] h, h\right)$$

$$\left(P_1(T)\,h, h\right) \leqslant \left(G(T,0)\,P_0\,G^*(T,0)\,h, h\right). \qquad (17.100)$$

18. Cas des systèmes du type hyperbolique ou « bien posé » au sens de Petrowsky.

18.1. Hypothèses. Notations. Rappels.

Nous reprenons les notations de 7.1. L'état du système est défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{y}}{dt} + \mathcal{A}\vec{y} = \mathcal{B}(t)\,\xi(t) + \vec{f}(t) \\ &\vec{y}(0) = \vec{\zeta}, \end{aligned}\right\} \qquad (18.1)$$

avec comme observation

$$z(t) = \mathcal{C}(t)\,\vec{y}(t) + \eta(t) \qquad (18.2)$$

L'estimateur optimal de l'état du système à l'instant présent T est défini par

$$\hat{\vec{y}}_T = \vec{y}_T(T), \qquad (18.3)$$

où $\vec{y}_T$ est solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{y}_T}{dt} + \mathcal{A}\vec{y}_T + \mathcal{D}_1(t)\,\vec{p}_T = \vec{f}(t) + \mathcal{B}(t)\,\bar{\xi}(t) \\ &-\frac{d\vec{p}_T}{dt} + \mathcal{A}^*\vec{p}_T - \mathcal{D}_2(t)\,\vec{y}_T = -\mathcal{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,z(t) \\ &\vec{y}_T(0) = \bar{\vec{\zeta}} - \mathcal{P}_0\vec{p}_T(0) \\ &\vec{p}_T(T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.4)$$

L'erreur d'estimation est alors définie par

$$\vec{\epsilon}_T = \hat{\vec{y}}_T - \vec{y}(T). \qquad (18.5)$$

Rappelons que $\mathcal{P}(T)$ est défini de la manière suivante : On considère le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \mathcal{A}\vec{\beta} + \mathcal{D}_1(t)\,\vec{\gamma} = 0 \\ &-\frac{d\vec{\gamma}}{dt} + \mathcal{A}^*\vec{\gamma} - \mathcal{D}_2(t)\,\vec{\beta} = 0 \\ &\vec{\gamma}(T) = \vec{h} \\ &\vec{\beta}(0) = -\mathcal{P}_0\vec{\gamma}(0) \end{aligned}\right\} \qquad (18.6)$$

alors

$$\vec{\beta}(T) = -\mathcal{P}(T)\,\vec{h}. \qquad (18.7)$$

Nous allons étudier maintenant les propriétés stochastiques de l'erreur $\vec{\epsilon}_T$.

18.2. **Erreur d'estimation.**

Nous avons

Lemme 18.1 : L'application $z \to \hat{\overrightarrow{y_T}}$ définie par (18.4) est affiné continue de $L^2(0, T; F) \to \mathscr{H}$.

Démonstration : Le système (18.4) correspond à la minimisation de la fonctionnelle, $(\theta = \xi, \overrightarrow{\zeta})$

$$\mathscr{L}_z(\theta) = [\mathscr{P}_0^{-1}(\overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\bar{\zeta}}), \overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\bar{\zeta}}] \qquad (18.8)$$

$$+ \int_0^T < Q^{-1}(t)(\xi(t) - \bar{\xi}(t)), \xi(t) - \bar{\xi}(t) > dt$$

$$+ \int_0^T < R^{-1}(t)(z(t) - \mathscr{C}(t)\overrightarrow{y}(t; \theta)), z(t) - \mathscr{C}(t)\overrightarrow{y}(t; \theta) > dt$$

où $\overrightarrow{y}(t; \theta)$ est la solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{y}}{dt} + A(t)\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f} + \mathscr{B}(t)\xi(t) \\ &\overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{\zeta}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.9)$$

Le contrôle optimal est alors défini par

$$\hat{\theta}_z = \begin{cases} \hat{\xi}_z = \bar{\xi} - Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\overrightarrow{p_T} \\ \overrightarrow{\zeta_z} = \overrightarrow{\bar{\zeta}} - \mathscr{P}_0\overrightarrow{p_T}(0) \end{cases} \qquad (18.10)$$

et

$$\overrightarrow{y_T} = y(\hat{\theta}_z). \qquad (18.11)$$

Soit donc une suite $z_n \to z$ dans $L^2(0, T; F)$. On a alors

$$\mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) = \inf_{\theta} \mathscr{L}_{z_n}(\theta) \leqslant \mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_z) \to \mathscr{L}_z(\hat{\theta}_z). \qquad (18.12)$$

De l'expression (18.8) de $\mathscr{L}_z(\theta)$, on déduit que $\hat{\theta}_{z_n}$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; E) \times \mathscr{H}$. Soit donc, encore notée $\hat{\theta}_{z_n}$ une sous suite extraite faiblement convergente vers $\bar{\theta} = [\bar{\xi}, \overrightarrow{\bar{\zeta}}]$. D'après la propriété de continuité (7.9), il en résulte que $\overrightarrow{y}(\hat{\theta}_{z_n}) \to \overrightarrow{y}(\bar{\theta})$ faiblement dans $L^2(0, T; \mathscr{H})$. Alors (18.8) donne par passage à la limite inférieure

$$\mathscr{L}_z(\bar{\theta}) \leqslant \liminf \mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}), \qquad (18.13)$$

d'où, en comparant à (18.12), il résulte

$$\bar{\theta} = \hat{\theta}_z. \qquad (18.14)$$

En raison de l'unicité de la limite, toute la suite $\hat{\theta}_{z_n} \to \hat{\theta}_z$ faiblement dans $L^2(0, T; E) \times \mathscr{H}$. Du fait que $\mathscr{L}_{z_n}(\hat{\theta}_{z_n}) \to \mathscr{L}_z(\hat{\theta}_z)$, il suit alors

$$\hat{\theta}_{z_n} \to \hat{\theta}_z \text{ fortement dans } L^2(0, T; E) \times \mathscr{H}. \qquad (18.15)$$

donc aussi

$$\overrightarrow{y}(\hat{\theta}_{z_n}) \to \overrightarrow{y}(\hat{\theta}_z) = \overrightarrow{y_{T,z}} \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathscr{H}), \qquad (18.16)$$

ce qui entraîne

$$\hat{\overrightarrow{y_{T,z_n}}} \to \hat{y}_{T,z} \text{ fortement dans } \mathscr{H}. \qquad (18.17)$$

Le lemme est ainsi démontré

Corollaire 18.1 : L'application

$$[\xi, \vec{\zeta}, \eta] \to \vec{\epsilon_T} \tag{18.18}$$

est affine continue de $L^2(0, T; E) \times \mathscr{H} \times L^2(0, T; F) \to \mathscr{H}$.

Démonstration : Immédiate à partir des formules (18.1), (18.2), (18.5) et du lemme 18.1.

18.3. **Caractéristiques stochastiques de l'erreur.**

Nous avons associé au triplet $[\xi, \vec{\zeta}, \eta]$ une mesure cylindrique sur l'espace $L^2(0, T; E) \times \mathscr{H} \times L^2(0, T; F)$. Par l'application (18.18), il en résulte une mesure cylindrique image sur $\mathscr{H}$. Nous avons :

Théorème 18.1 : Hypothèses. Notations de 18.1. La mesure cylindrique sur $\mathscr{H}$ associée à l'erreur d'estimation $\vec{\epsilon_T}$ possède les caractéristiques suivantes :

espérance mathématique $= 0$ *(18.19)*

opérateur de covariance $= \mathscr{P}(T)$. *(18.20)*

Démonstration : De (18.4), (18.6) on tire

$$0 = \int_0^T \left[\vec{y_T}, -\frac{d\vec{p}}{dt} + \mathscr{A}^* \vec{p} - \mathscr{D}_2(t)\vec{\beta} \right] dt \tag{18.21}$$

$$= -[\vec{h}, \vec{y_T}(T)] + [\vec{p}(0), \vec{y_T}(0)] + \int_0^T [\vec{p}, \frac{d\vec{y_T}}{dt} + \mathscr{A}\vec{y_T}]\, dt$$

$$- \int_0^T [\mathscr{D}_2(t)\vec{y_T}, \vec{\beta}]\, dt,$$

d'où

$$[\vec{h}, \hat{\vec{y_T}}] = [\vec{p}(0), \vec{y_T}(0)] + \int_0^T [\vec{p}, \vec{f}(t) + \mathscr{B}(t)\bar{\xi}(t)]\, dt \tag{18.22}$$

$$- \int_0^T [\vec{p}, \mathscr{D}_1(t)\vec{p_T}]\, dt - \int_0^T [\mathscr{D}_2(t)\vec{y_T}, \vec{\beta}]\, dt,$$

et encore

$$[\hat{\vec{y_T}}, \vec{h}] = [\vec{p}(0), \vec{y_T}(0)] + \int_0^T [\vec{p}, \vec{f} + \mathscr{B}(t)\bar{\xi}(t)]\, dt \tag{18.23}$$

$$- \int_0^T [\vec{p}, \mathscr{D}_1(t)\vec{p_T}]\, dt - \int_0^T \left[\vec{\beta}, -\frac{d\vec{p_T}}{dt} + \mathscr{A}^* \vec{p_T} + \mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t) \right] dt,$$

soit

$$[\hat{\vec{y_T}}, \vec{h}] = [\vec{p}(0), \bar{\vec{\zeta}} - \mathscr{P}_0 \vec{p_T}(0)] + \int_0^T [\vec{p}, \vec{f} + \mathscr{B}(t)\bar{\xi}(t)]\, dt \tag{18.24}$$

$$- \int_0^T [\vec{p}, \mathscr{D}_1(t)\vec{p_T}]\, dt - \{ -[\vec{p_T}(0), \mathscr{P}_0 \vec{p}(0)] - \int_0^T [\vec{p_T}, \mathscr{D}_1(t)\gamma]\, dt$$

$$+ \int_0^T [\vec{\beta}, \mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, z(t)]\, dt \};$$

$$[\hat{\vec{y_T}}, \vec{h}] = [\vec{p}(0), \bar{\vec{\zeta}}] + \int_0^T [\vec{p}, \vec{f} + \mathscr{B}(t)\bar{\xi}(t)]\, dt - \int_0^T [\vec{\beta}, \mathscr{D}_2(t)\vec{y}(t)]\, dt \tag{18.25}$$

$$- \int_0^T [\vec{\beta}, \mathscr{C}^*(t)\, R^{-1}(t)\, \eta(t)]\, dt$$

$$= [\vec{p}(0), \bar{\vec{\zeta}}] + \int_0^T [\vec{p}, \vec{f} + \mathscr{B}(t)\bar{\xi}(t)]\, dt - \int_0^T \left[\vec{y}(t), -\frac{d\vec{p}}{dt} + \mathscr{A}^* \vec{p} \right] dt$$

$$- \int_0^T [\overrightarrow{\beta}, \mathscr{C}^* (t) R^{-1} (t) \eta (t)] \, dt$$

$$= [\overrightarrow{\gamma} (0), \overrightarrow{\bar{\zeta}}] + \int_0^T [\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{f} + \mathscr{B} (t) \overrightarrow{\bar{\xi}} (t)] \, dt - \{ [\overrightarrow{\gamma} (0), \overrightarrow{\zeta}]$$

$$+ \int_0^T [\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{f} + \mathscr{B} \xi] \, dt - [\overrightarrow{h}, \overrightarrow{y} (T)] \} - \int_0^T [\overrightarrow{\beta}, \mathscr{C}^* R^{-1} \eta] \, dt,$$

d'où en définitive la formule

$$[\overrightarrow{\epsilon_T}, \overrightarrow{h}] = - [\overrightarrow{\gamma} (0), \overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\bar{\zeta}}] - \int_0^T < \mathscr{B}^* (t) \overrightarrow{\gamma}, \xi - \bar{\xi} > dt - \int_0^T < R^{-1} \mathscr{C} \overrightarrow{\beta}, \eta > dt. \quad (18.26)$$

Posons

$$\overrightarrow{\tilde{\zeta}} = \overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\bar{\zeta}} \quad (18.27)$$

$$\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi} \quad (18.28)$$

et

$\overrightarrow{\gamma_h}, \overrightarrow{\beta_h}$ désignent la solution de (18.6), pour marquer la dépendance en $\overrightarrow{h}$. *(18.29)*

On a alors

$$[\overrightarrow{\epsilon_T}, \overrightarrow{h}] = - [\overrightarrow{\gamma_h} (0), \overrightarrow{\tilde{\zeta}}] - \int_0^T < \mathscr{B}^* (t) \overrightarrow{\gamma_h} (t), \tilde{\xi} (t) > dt \quad (18.30)$$

$$- \int_0^T < R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) \overrightarrow{\beta_h} (t), \eta (t) > dt.$$

L'espérance mathématique de $\overrightarrow{\tilde{\zeta}}, \tilde{\xi} (t), \eta (t)$ étant 0, il en résulte (18.19).

Si on désigne par Λ_T l'opérateur de covariance de $\overrightarrow{\epsilon_T}$, la formule (18.30) donne, pour $\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h'}$ quelconques dans $\mathscr{H}$:

$$[\Lambda_T \overrightarrow{h}, \overrightarrow{h'}] = [\mathscr{P}_0 \overrightarrow{\gamma_h} (0), \overrightarrow{\gamma_{h'}} (0)] \quad (18.31)$$

$$+ \int_0^T < Q (t) \mathscr{B}^* (t) \overrightarrow{\gamma_h} (t), \mathscr{B}^* (t) \overrightarrow{\gamma_{h'}} (t) > dt$$

$$+ \int_0^T < R (t) R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) \overrightarrow{\beta_h} (t), R^{-1} (t) \mathscr{C} (t) \overrightarrow{\beta_{h'}} (t) > dt$$

$$= [\mathscr{P}_0 \overrightarrow{\gamma_h} (0), \overrightarrow{\gamma_{h'}} (0)] + \int_0^T [\mathscr{D}_1 (t) \overrightarrow{\gamma_h} (t), \overrightarrow{\gamma_{h'}} (t)] \, dt$$

$$+ \int_0^T [\mathscr{D}_2 (t) \overrightarrow{\beta_h} (t), \overrightarrow{\beta_{h'}} (t)] \, dt$$

$$= [\mathscr{P}_0 \overrightarrow{\gamma_h} (0), \overrightarrow{\gamma_{h'}} (0)] + \int_0^T [\mathscr{D}_1 (t) \overrightarrow{\gamma_h} (t), \overrightarrow{\gamma_{h'}} (t)] \, dt$$

$$+ \int_0^T \left[- \frac{d \overrightarrow{\gamma_h}}{dt} + \mathscr{A}^* \overrightarrow{\gamma_h}, \overrightarrow{\beta_{h'}} (t) \right] dt$$

$$= [\mathscr{P} (T) \overrightarrow{h}, \overrightarrow{h'}],$$

ce qui démontre (18.20).

19. Propriétés de l'opérateur de covariance $\mathscr{P}$ (T).

19.1. Une propriété d'optimalité de $\mathscr{P}$ (T).

19.1.1. Le problème - Hypothèses - Notations.

Nous considérons le système (cf. notations de 7.3.1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \overrightarrow{y}}{dt} + \mathscr{A} \overrightarrow{y} &= \overrightarrow{f} (t) + \mathscr{B} (t) \xi (t) \\ \overrightarrow{y} (0) &= \overrightarrow{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

avec comme observation

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\,\vec{y}(t) + \eta(t)\,. \qquad (19.2)$$

Nous nous donnons un opérateur *quelconque* $\mathscr{K}(t) \in \mathscr{L}(F; \mathscr{H})$, $t \in [0, T]$, tel que

$$\sup_{t \in [0, T]} \| \mathscr{K}(t) \|_{\mathscr{L}(F; \mathscr{H})} \text{ soit borné.} \qquad (19.3)$$

A tout opérateur $\mathscr{K}(t)$ nous associons la solution $\vec{e}(t)$ de l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{e}}{dt} + \mathscr{A}\vec{e} = \vec{f}(t) + \mathscr{B}(t)\,\vec{\xi}(t) + \mathscr{K}(t)\,(z(t) - \mathscr{C}(t)\,\vec{e}(t)) \\ &\vec{e}(0) = \vec{\vec{\zeta}} \end{aligned}\right\} \qquad (19.4)$$

Définition 19.1 - On appelle « Filtre », la solution de (19.4) correspondant à un opérateur $\mathscr{K}(t)$ donné. La valeur choisie de $\mathscr{K}(t)$ s'appelle *gain du filtre* $\vec{e}(t)$. ■

Nous pouvons donner un exemple de filtre. En effet prenons

$$\mathscr{K}_0(t) = \mathscr{P}(t)\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t). \qquad (19.5)$$

On voit alors aisément que (19.4) redonne l'équation (8.28). Par conséquent $\vec{r}(t)$ est un filtre correspondant à un gain défini par (19.5).

Nous allons nous intéresser maintenant à l'erreur $\vec{\epsilon}(t)$ correspondant au filtre $\vec{e}(t)$. Elle est définie par

$$\vec{\epsilon}(t) = \vec{e}(t) - \vec{y}(t). \qquad (19.6)$$

On voit alors aisément, en utilisant (19.1), (19.2) et (19.4) que $\vec{\epsilon}(t)$ est la solution de l'équation d'évolution

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{\epsilon}}{dt} + \mathscr{A}\vec{\epsilon} + \mathscr{K}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{\epsilon} = -\mathscr{B}(t)\,\tilde{\xi}(t) + \mathscr{K}(t)\,\eta(t) \\ &\vec{\epsilon}(0) = -\vec{\tilde{\zeta}}, \end{aligned}\right\} \qquad (19.7)$$

en posant

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \overline{\xi}(t) \qquad (19.8)$$

$$\vec{\tilde{\zeta}} = \vec{\zeta} - \vec{\overline{\zeta}}. \qquad (19.9)$$

Considérons maintenant, plus précisément, l'erreur ϵ (T) et soit $\Lambda_{\mathscr{K}}$ (T) son opérateur de covariance. Nous nous posons le même problème qu'au n° 17.10, i. e. existe-t-il $\mathscr{K}^*$ vérifiant

$$[\Lambda_{\mathscr{K}}(T)\,\vec{h}, \vec{h}] \geqslant [\Lambda_{\mathscr{K}^*}(T)\,\vec{h}, \vec{h}], \quad \forall\, \vec{h} \in \mathscr{H}, \forall\, \mathscr{K}. \qquad (19.10)$$

19.1.2 - Propriétés de découplage.

Rappelons brièvement les propriétés de découplage qui nous seront utiles. Soit une famille $\mathscr{D}(t)$, $t \in [0, T]$ d'opérateurs vérifiant

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{D}(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H}), \ \forall\, t, \ \sup_t \| \mathscr{D}(t) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H})} \text{ borné.} \\ &\mathscr{D}(t) \text{ autoadjoint positif.} \end{aligned}\right\}$$

Soit $\vec{h}$ un élément quelconque de $\mathscr{H}$. On considère le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \mathscr{A}(t)\,\vec{\beta} + \mathscr{D}(t)\,\vec{\gamma} = 0 \\ &-\frac{d\vec{\gamma}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\vec{\gamma} - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{\beta} = 0 \\ &\vec{\beta}(0) = -\mathscr{P}_0\,\vec{\gamma}(0) \\ &\vec{\gamma}(T) = \vec{h} \end{aligned}\right\} \qquad (19.11)$$

qui se découple normalement, soit :

$$\overrightarrow{\beta}(t) = -\pi(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,,\ t \in]\,0,\,T\,[\,, \tag{19.12}$$

où $\pi(t)$ est solution de l'équation de Riccati

$$\frac{d}{dt}(\pi\overrightarrow{\varphi}) + \pi\left(-\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\varphi}\right) + \pi\mathscr{C}^*\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\pi\overrightarrow{\varphi} + \mathscr{A}\pi\overrightarrow{\varphi} = \mathscr{D}\overrightarrow{\varphi}$$

$$\pi(0) = \mathscr{P}_0$$

$$\forall\ \overrightarrow{\varphi} \in L^2(0,\,T;\,\mathscr{H})\ \text{vérifiant}\ -\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\varphi} \in L^2(0,\,T;\,\mathscr{H}). \tag{19.13}$$

Nous considérons ensuite le cas $\mathscr{C}(t) = 0$, i. e., le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{\beta_1}}{dt} + \mathscr{A}(t)\,\overrightarrow{\beta_1} + \mathscr{D}(t)\,\overrightarrow{\gamma_1} = 0\\ &-\frac{d\overrightarrow{\gamma_1}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma_1} = 0\\ &\overrightarrow{\beta_1}(0) = -\mathscr{P}_0\,\overrightarrow{\gamma_1}(0)\\ &\overrightarrow{\gamma_1}(T) = \overrightarrow{h}. \end{aligned}\right\} \tag{19.14}$$

On a alors

$$\overrightarrow{\beta_1}(t) = -\Lambda(t)\,\overrightarrow{\gamma_1}(t)\,,\ t \in [\,0,\,T\,]\,, \tag{19.15}$$

où $\Lambda(t)$ est solution de l'équation de Riccati

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\Lambda\overrightarrow{\varphi}) + \Lambda\left(-\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\varphi}\right) + \mathscr{A}\Lambda\overrightarrow{\varphi} = \mathscr{D}\overrightarrow{\varphi}\\ &\Lambda(0) = \mathscr{P}_0\\ &\forall\ \varphi \in L^2(0,\,T;\,\mathscr{H})\ \text{vérifiant}\ -\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*\overrightarrow{\varphi} \in L^2(0,\,T;\,\mathscr{H}). \end{aligned}\right\} \tag{19.16}$$

Comme au n° 17.1.2, $\Lambda(t)$ peut se formuler différemment en introduisant l'opérateur de Green $\mathscr{G}(t,\,\tau)$ associé à $\mathscr{A}(t)$, on voit aisément que l'on a

$$\Lambda(t) = \mathscr{G}(t,\,0)\,\mathscr{P}_0\,\mathscr{G}^*(t,\,0) + \int_0^t \mathscr{G}(t,\,\tau)\,\mathscr{D}(\tau)\,\mathscr{G}^*(t,\,\tau)\,d\tau. \tag{19.17}$$

19.1.3 - Théorème d'optimalité.

Théorème 19.1 - Hypothèses-Notations de 19.1.1. Il existe un gain et un seul $\mathscr{K}^*$ vérifiant (11.10). Ce gain $\mathscr{K}^*$ n'est autre que le gain $\mathscr{K}_0$ défini en (19.5).

Démonstration

On voit de manière analogue à la démonstration du théorème 17.1, que l'opérateur de covariance $\Lambda_{\mathscr{K}}(T)$ de l'erreur $\overrightarrow{\epsilon}(T)$ définie en (19.7), vérifie l'équation de Riccati.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\Lambda_{\mathscr{K}}\overrightarrow{\varphi}) + \Lambda_{\mathscr{K}}\left(-\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi} + \mathscr{C}^*(t)\,\mathscr{K}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi}\right)\\ &+ \left(\mathscr{A}(t) + \mathscr{K}(t)\,\mathscr{C}(t)\right)\Lambda_{\mathscr{K}}\overrightarrow{\varphi} = \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi}\\ &+ \mathscr{K}(t)\,R(t)\,\mathscr{K}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi}\\ &\Lambda_{\mathscr{K}}(0) = \mathscr{P}_0\\ &\forall\ \overrightarrow{\varphi} \in L^2(0,\,T;\,\mathscr{H}),\ \text{vérifiant}\ -\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi} \in L^2(0,\,T;\,\mathscr{H})\,, \end{aligned}\right\} \tag{19.18}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_{\mathscr{X}}\overrightarrow{\varphi}) + \Lambda_{\mathscr{X}}\left(-\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi}\right) + \Lambda_{\mathscr{X}}\mathscr{C}^*\,R^{-1}\,\mathscr{C}\,\Lambda_{\mathscr{X}}\overrightarrow{\varphi}$$

$$= \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\varphi} + (\mathscr{X} - \Lambda_{\mathscr{X}}\mathscr{C}^*\,R^{-1})\,R\,(\mathscr{X}^* - R^{-1}\,\mathscr{C}\,\Lambda_{\mathscr{X}})\,\overrightarrow{\varphi}$$

$$\Lambda_{\mathscr{X}}(0) = \mathscr{S}_0\,. \qquad (19.19)$$

Posons alors

$$\sum_{\mathscr{X}}(t) = (\mathscr{X} - \Lambda_{\mathscr{X}}\mathscr{C}^*\,R^{-1})\,R\,(\mathscr{X}^* - R^{-1}\,\mathscr{C}\,\Lambda_{\mathscr{X}}).$$

La démonstration se fait ensuite de manière analogue à celle du théorème 17.1. On introduit $\overrightarrow{\beta_2}$ et $\overrightarrow{\gamma_2}$ solutions de

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\overrightarrow{\beta_2}}{dt} + \mathscr{A}(t)\,\overrightarrow{\beta_2} + \left(\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t) + \sum_{\mathscr{X}}(t)\right)\overrightarrow{\gamma_2} = 0\\
&-\frac{d\overrightarrow{\gamma_2}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma_2} - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{\beta_2} = 0\\
&\overrightarrow{\beta_2}(0) = -\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma_2}(0)\\
&\overrightarrow{\gamma_2}(T) = \overrightarrow{h}\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (19.20)$$

et l'on a

$$\overrightarrow{\beta_2}(t) = -\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,,\ t \in [\,0, T\,]\,. \qquad (19.21)$$

Par conséquent $\overrightarrow{\gamma_2}$ est solution de

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{d\overrightarrow{\gamma_2}}{dt} + \left(\mathscr{A}^*(t) + \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\right)\overrightarrow{\gamma_2} = 0\\
&\overrightarrow{\gamma_2}(T) = \overrightarrow{h}.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.22)$$

On a de plus

$$[\,\Lambda_{\mathscr{X}}(T)\,\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h}\,] = [\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma_2}(0), \overrightarrow{\gamma_2}(0)\,] \qquad (19.23)$$

$$+ \int_0^T [\,\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t), \overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt$$

$$+ \int_0^T [\,\textstyle\sum_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t), \overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt$$

$$+ \int_0^T dt\,[\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t), \Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]$$

$$\geqslant [\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma_2}(0), \overrightarrow{\gamma_2}(0)\,] + \int_0^T [\,\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t), \overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt$$

$$+ \int_0^T [\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t), \Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt\,.$$

De même, pour $\mathscr{P}(t)$ et $\mathscr{K}_0(t)$ définis en (19.5), on a :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\overrightarrow{\beta}}{dt} + \mathscr{A}(t)\,\overrightarrow{\beta} + \mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma} = 0\\
&-\frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt} + \mathscr{A}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma} - \mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{\beta} = 0\\
&\overrightarrow{\beta}(0) = -\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma}(0)\\
&\overrightarrow{\gamma}(T) = \overrightarrow{h}
\end{aligned}\right\} \qquad (19.24)$$

et

$$\overrightarrow{\beta}(t) = -\mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,, \tag{19.25}$$

puis

$$[\,\mathscr{P}(T)\,\overrightarrow{h}\,,\,\overrightarrow{h}\,] = [\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma}(0)\,,\,\overrightarrow{\gamma}(0)\,] \tag{19.26}$$

$$+\int_0^T [\,\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,,\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,]\,dt$$

$$+\int_0^T [\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,,\,\mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,]\,dt\,.$$

De (19.22) et (19.24), on déduit

$$[\,\mathscr{P}(T)\,\overrightarrow{h}\,,\,\overrightarrow{h}\,] = [\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma}(0)\,,\,\overrightarrow{\gamma_2}(0)\,] \tag{19.27}$$

$$+\int_0^T [\,\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,,\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt$$

$$+\int_0^T [\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,,\,\mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,]\,dt.$$

Comme la quantité

$$\rho = [\,\mathscr{S}_0\,(\overrightarrow{\gamma}(0) - \overrightarrow{\gamma_2}(0))\,,\,\overrightarrow{\gamma}(0) - \overrightarrow{\gamma_2}(0)\,]$$

$$+\int_0^T dt\,[\,\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,(\overrightarrow{\gamma}(t) - \overrightarrow{\gamma_2}(t))\,,\,\overrightarrow{\gamma}(t) - \overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]$$

$$+\int_0^T [\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,(\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t) - \mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t))\,,\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t) - \mathscr{P}(t)\,\overrightarrow{\gamma}(t)\,]\,dt$$

est évidemment positive, on voit en développant ρ que l'on a

$$[\,\mathscr{S}_0\,\overrightarrow{\gamma_2}(0)\,,\,\overrightarrow{\gamma_2}(0)\,] + \int_0^T [\,\mathscr{B}(t)\,Q(t)\,\mathscr{B}^*(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,,\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt$$

$$+\int_0^T [\,\mathscr{C}^*(t)\,R^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,,$$

$$\Lambda_{\mathscr{X}}(t)\,\overrightarrow{\gamma_2}(t)\,]\,dt \geqslant [\,\mathscr{P}(T)\,\overrightarrow{h}\,,\,\overrightarrow{h}\,]\,,$$

et en comparant avec (19.23), on obtient

$$[\,\Lambda_{\mathscr{X}}(T)\,\overrightarrow{h}\,,\,\overrightarrow{h}\,] = [\,\mathscr{P}(T)\,\overrightarrow{h}\,,\,\overrightarrow{h}\,]\,,$$

ce qui achève la démonstration du théorème [1].

19.2 - Majorations à priori.

19.2.1 - Le cas $\mathscr{B} = 0$.

De manière analogue à 17.2, nous considérons le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{y}}{dt} + \mathscr{A}\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f} \\ &\overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{\zeta} \end{aligned}\right\} \tag{19.28}$$

avec, comme observation

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\,\overrightarrow{y}(t) + \eta(t). \tag{19.29}$$

Nous introduisons, comme pour 17.2.1, l'opérateur $\mathscr{S}_1(T)$ défini de la manière suivante :

---

(1) Pour des résultats correspondant en dimension finie, aux théorèmes 17.1 et 19.1, et utilisant, dans la démonstration, une méthode directe, nous renvoyons à P. FAURRE [20].

On considère le système (issu de (18.6))

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{\beta}_1}{dt} + \mathscr{A}\,\vec{\beta}_1 = 0 \\ &-\frac{d\vec{\gamma}_1}{dt} + \mathscr{A}^*\,\vec{\gamma}_1 - \mathscr{D}_2(t)\,\vec{\beta}_1 = 0 \\ &\vec{\gamma}_1(\mathrm{T}) = \vec{h} \\ &\vec{\beta}_1(0) = -\mathscr{P}_0\,\vec{\gamma}_1(0), \end{aligned}\right\} \quad (19.30)$$

alors

$$\vec{\beta}_1(\mathrm{T}) = -\mathscr{P}_1(\mathrm{T})\,\vec{h}\,; \quad (19.31)$$

$\mathscr{P}_1(\mathrm{T})$ est l'opérateur de covariance de l'erreur d'estimation commise sur l'état $\vec{y}(\mathrm{T})$ du système (19.28).

19.2.2. **Comparaison de $\mathscr{P}(\mathrm{T})$ et $\mathscr{P}_1(\mathrm{T})$.**

Le système (18.6) correspond aux équations d'Euler du problème de contrôle optimal suivant :

Minimiser $(\theta = u, \vec{v})$

$$\mathscr{L}(\theta) = [\mathscr{P}_0^{-1}\vec{v}, \vec{v}] + \int_0^{\mathrm{T}} <\mathrm{Q}^{-1}(t)\,u(t), u(t)>\,dt \quad (19.32)$$

$$+ \int_0^{\mathrm{T}} <\mathrm{R}^{-1}\,\mathscr{C}\vec{\beta}(t;\theta), \mathscr{C}\vec{\beta}(t;\theta)>\,dt$$

$$+ 2\,[\vec{h}, \vec{\beta}(\mathrm{T};\theta)]$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \mathscr{A}\vec{\beta} = \mathscr{B}(t)\,u(t) \\ &\vec{\beta}(0) = \vec{v}. \end{aligned}\right\} \quad (19.33)$$

Le système (19.30) correspond aux équations d'Euler du problème de contrôle optimal suivant :

Minimiser

$$\mathrm{J}(v) = [\,\mathscr{P}_0^{-1}\vec{v}, \vec{v}] + \int_0^{\mathrm{T}} <\mathrm{R}^{-1}(t)\,\mathscr{C}(t)\,\vec{\beta}_1(t;\vec{v}), \mathscr{C}(t)\,\vec{\beta}_1(t;\vec{v})>\,dt \quad (19.34)$$

$$+ 2\,[\vec{h}, \vec{\beta}_1(\mathrm{T};\vec{v})]$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vec{\beta}_1}{dt} + \mathscr{A}\vec{\beta}_1 = 0 \\ &\vec{\beta}_1(0) = \vec{v}. \end{aligned}\right\} \quad (19.35)$$

La valeur optimale du critère (19.32) est donnée par

$$\inf\ \mathscr{L}(\theta) = [\vec{\beta}(\mathrm{T};\hat{\theta}), \vec{h}] = -[\mathscr{P}(\mathrm{T})\,\vec{h}, \vec{h}]. \quad (19.36)$$

La valeur optimale du critère (19.34) est donnée par

$$\inf\ \mathrm{J}(v) = [\vec{\beta}_1(\mathrm{T};\hat{\vec{v}}_1), \vec{h}] = -[\mathscr{P}_1(\mathrm{T})\,\vec{h}, \vec{h}] \quad (19.37)$$

où $\hat{\theta}$ et $\hat{\vec{v}}_1$ désignent les contrôles optimaux des problèmes (19.32) et (19.34).

On a

$$J(v) = \mathcal{L}(0, v) \qquad (u = 0), \qquad \forall\, v \tag{19.38}$$

d'où

$$\inf_{v} J(v) \geqslant \inf_{\theta} \mathcal{L}(\theta) \tag{19.39}$$

ce qui entraîne

Proposition 19.2 : Les opérateurs $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{P}_1(T)$ définis par (18.7) et (19.31) vérifient

$$\mathcal{P}(T) \geqslant \mathcal{P}_1(T), \qquad \forall\, T. \tag{19.40}$$

Remarque 19.1 : analogue à la remarque 17.3.

19.2.3. Majorations vérifiées par $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{P}_1(T)$.

On les obtient, comme au n° 17.3.2, à partir des équations de Riccati vérifiées par $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{P}_1(T)$. Nous choisissons φ solution de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\vec{\varphi}}{dt} + \mathcal{A}^* \vec{\varphi} = 0 \\ &\vec{\varphi}(T) = \vec{h} \in \mathcal{H}. \end{aligned}\right\} \tag{19.41}$$

L'équation de Riccati (8.27) donne alors

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\mathcal{P}\vec{\varphi}) + \mathcal{P}(t)\,\mathcal{D}_2(t)\,\mathcal{P}(t)\vec{\varphi} + \mathcal{A}\,\mathcal{P}\vec{\varphi} = \mathcal{D}_1(t)\vec{\varphi} \\ &\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0, \end{aligned}\right\} \tag{19.42}$$

d'où

$$\int_0^T \left[\frac{d}{dt}(\mathcal{P}\vec{\varphi}) + \mathcal{A}\,\mathcal{P}\vec{\varphi}, \vec{\varphi}\right] dt + \int_0^T [\mathcal{P}(t)\,\mathcal{D}_2(t)\,\mathcal{P}(t)\vec{\varphi}, \vec{\varphi}]\, dt \tag{19.43}$$

$$-\int_0^T [\mathcal{D}_1 \vec{\varphi}, \vec{\varphi}]\, dt = 0,$$

soit

$$[\mathcal{P}(T)\vec{h}, \vec{h}] - [\mathcal{P}_0\vec{\varphi}(0), \vec{\varphi}(0)] + \int_0^T [\mathcal{P}(t)\,\mathcal{D}_2(t)\,\mathcal{P}(t)\vec{\varphi}, \vec{\varphi}]\, dt \tag{19.44}$$

$$-\int_0^T [\mathcal{D}_1 \vec{\varphi}, \vec{\varphi}]\, dt = 0,$$

et relation analogue pour $\mathcal{P}_1(T)$. Nous pouvons ainsi énoncer

Proposition 19.3 : Les opérateurs de covariance optimaux $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{P}_1(T)$ vérifient les majorations suivantes :

$$[\mathcal{P}(T)\vec{h}, \vec{h}] \leqslant [\mathcal{P}_0\vec{\varphi}(0), \vec{\varphi}(0)] + \int_0^T [\mathcal{D}_1(t)\vec{\varphi}, \vec{\varphi}]\, dt \tag{19.45}$$

$$[\mathcal{P}_1(T)\vec{h}, \vec{h}] \leqslant [\mathcal{P}_0\vec{\varphi}(0), \vec{\varphi}(0)]. \tag{19.46}$$

§ 4 : Filtrage dans le cas d'observations faites sans erreur.

20 - Orientation générale. Cas des systèmes complètement déterministes.

20.1 - Orientation.

Nous avons noté dans les remarques 10.4 et 11.1, que l'hypothèse R (*t*) inversible

était *fondamentale*, pour utiliser le critère des moindres carrés et par conséquent pour obtenir le filtrage. Physiquement, cette hypothèse correspond au fait que l'erreur d'observation η doit être du type bruit blanc (cf. définition 6.1 du Chapitre I). Ceci est un peu gênant pour l'esprit, puisque, par exemple, il n'est pas possible de définir de filtre dans le cas où l'erreur d'observation est une *vraie* variable aléatoire, ou, ce qui est encore plus difficile à concevoir, dans le cas, tout de même favorable, où l'observation se fait exactement.

L'objet de ce paragraphe est de donner une réponse *partielle* à ce problème. Nous montrerons, qu'ayant défini de façon convenable le meilleur estimateur, il est possible de lui associer un *filtre approché*. Signalons une réponse, de nature différente à la notre, à ce problème, faite par LUENBERGER [38], dans le cas de la dimension finie.

Nous nous restreindrons aux systèmes paraboliques, et nous supposerons que l'observation se fait *exactement* (i. e. l'opérateur de covariance de l'erreur d'observation $R(t) \equiv 0$), mais les mêmes méthodes peuvent s'appliquer aux systèmes autres que paraboliques, et dans le cas où $R(t) \neq 0$ [1], par exemple dans le cas où η est une vraie variable aléatoire (i. e. $R(t)$ nucléaire).

20.2 - Cas des systèmes complètement déterministes.

20.2.1 - Hypothèses - Notations - Le problème.

On considère, avec des hypothèses standard, le système défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = f \\ &y(0) = \zeta \in H\,, \end{aligned}\right\} \qquad (20.1)$$

f est donnée, par exemple dans $L^2(0, T; H)$, mais ζ *état initial* du système est *non connu* (mais non probabiliste). Par contre on dispose de l'observation

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\,y(t;\zeta) \qquad t \in [\,0\,,T\,] \qquad (20.2)$$

où

$$\mathscr{C}(t) \in \mathscr{L}(H; F)\,,\ \forall\, t \in [\,0, T\,]\,. \qquad (20.3)$$

Le problème consiste à estimer l'état *présent* $y(T; \zeta)$ du système, d'une manière qui prête au calcul *récursif* (filtrage).

Nous avons rencontré des circonstances analogues au § 2 du Chapitre II (cf. par exemple n° 5.1, hypothèse A). Le raisonnement utilisé, que nous reprenons, est alors le suivant : Tout d'abord nous faisons l'hypothèse que l'ensemble

$$X = \{\, \zeta \in H \mid z(t) = \mathscr{C}(t)\,y(t;\zeta)\,,\ t \in [\,0, T\,]\,\} \qquad (20.4)$$

est non vide. Nous cherchons alors un élément (à priori quelconque) de X.

Pour cela, nous minimisons la fonctionnelle

$$J(\zeta) = \int_0^T |\,z(t) - \mathscr{C}(t)\,y(t;\zeta)\,|_F^2\,dt. \qquad (20.5)$$

La borne inférieure de $J(\zeta)$ est 0, et cette borne inférieure est atteinte en tous les points de X. Nous adopterons la

Définition 20.1 : On appelle estimateur *optimal* de l'état présent $y(T)$ du système (20.1), tout élément de H de la forme $y(T; \hat{\zeta})$, où $\hat{\zeta}$ est un élément *quelconque* de X.

20.2.2 - Estimateur optimal approché - Régularisation.

Nous introduisons alors le critère

$$J_\lambda(\zeta) = \int_0^T |\,z(t) - \mathscr{C}(t)\,y(t;\zeta)\,|^2 dt + \lambda\,|\,\zeta\,|_H^2\,, \qquad (20.6)$$

---

(1) mais, bien entendu, non inversible, puisque sans ça on peut définir un filtre exact.

λ étant un nombre > 0. Nous avons

Proposition 20.1 : Il existe un élément ζ_λ unique vérifiant

$$J_\lambda(\zeta_\lambda) = \inf_{\zeta} J_\lambda(\zeta). \tag{20.7}$$

Démonstration : La fonctionnelle $J_\lambda(\zeta)$ étant quadratique et cœrcive, le résultat est classique ■

Si maintenant nous faisons tendre λ vers 0, nous avons

Théorème 20.1 : Hypothèses - Notations de 20.2.1. Lorsque $\lambda \to 0$, on a

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_\lambda \text{ converge fortement dans H vers l'élément } \hat{\zeta} \text{ de X qui vérifie} \\ |\hat{\zeta}|_H = \inf_{\zeta \in X} |\zeta| \end{array}\right\} \tag{20.8}$$

$$J(\zeta_\lambda) \to 0. \tag{20.9}$$

Démonstration : Soit ζ_0 un élément de X, on a

$$J(\zeta_\lambda) \leqslant J_\lambda(\zeta_\lambda) = \inf_{\zeta} J_\lambda(\zeta) \leqslant J_\lambda(\zeta_0) = \lambda |\zeta_0|_H^2, \tag{20.10}$$

ce qui prouve (20.10). On a aussi

$$\lambda |\zeta_\lambda|_H^2 \leqslant J_\lambda(\zeta_\lambda) \leqslant \lambda |\zeta_0|_H^2, \tag{20.11}$$

d'où

$$|\zeta_\lambda|_H \leqslant |\zeta_0|_H. \tag{20.12}$$

Soit une sous suite, encore notée ζ_λ, extraite, faiblement convergente dans H vers un élément ζ^*. D'après (20.12), qui est vraie $\forall\, \zeta_0 \in X$, on a

$$|\zeta^*| \leqslant \liminf_{\lambda \to 0} |\zeta_\lambda| \leqslant \inf_{\zeta \in X} |\zeta|. \tag{20.13}$$

Or X est un convexe fermé de H, donc faiblement fermé. Il en résulte que $\zeta^* \in X$. Donc, en raison de (20.13)

$$|\zeta^*| = \inf_{\zeta \in X} |\zeta|. \tag{20.14}$$

Or, comme X est un convexe fermé de H, il existe un élément et un seul $\hat{\zeta}$ de X vérifiant (20.14). Donc

$$\zeta^* = \hat{\zeta} \tag{20.15}$$

et en raison de l'unicité de la limite, toute la suite ζ_λ converge faiblement dans H vers $\hat{\zeta}$. En raison de (20.13), on a aussi

$$|\zeta_\lambda|_H \to |\hat{\zeta}|_H \tag{20.16}$$

ce qui, avec la convergence faible, assure la convergence forte.

Corollaire 20.1. Posons

$$\hat{y}_{T,\lambda} = y(T; \zeta_\lambda). \tag{20.17}$$

Alors

$$\left.\begin{array}{l} \hat{y}_{T,\lambda} \text{ converge lorsque } \lambda \to 0, \text{ vers l'estimateur optimal } y(T; \hat{\zeta}) \\ \text{où } \hat{\zeta} \text{ est défini en (20.8).} \end{array}\right\} \tag{20.18}$$

Démonstration : Immédiate, en raison de la continuité de l'application

$\zeta \to y(T; \zeta)$ définie par (20.1) ■

On adoptera la

Définition 20.2 : L'élément $\hat{y}_{T,\lambda}$ défini en (20.17) sera appelé *estimateur optimal approché* de l'état présent $y(T)$ du système (20.1) ■

L'intérêt de l'estimateur optimal approché, c'est que, contrairement à n'importe quel estimateur optimal, il peut se définir à l'aide d'un filtre.

20.2.3 - **Filtre de l'estimateur optimal approché.**

Nous avons tout d'abord :

Théorème 20.2 : Le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_T}{dt} + A(t)\, y_T = f(t) \\ &-\frac{dp_T}{dt} + A^*(t)\, p_T - \mathscr{C}^*(t)\,\mathscr{C}(t)\, y_T = -\mathscr{C}^*(t)\, z(t) \\ &y_T(0) + \frac{1}{\lambda}\, p_T(0) = 0 \\ &p_T(T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (20.19)$$

possède une solution unique et l'on a

$$\hat{y}_{T,\lambda} = y_T(T). \quad (20.20)$$

Démonstration : Il suffit de remarquer l'analogie entre le problème de minimisation de $J_\lambda(\zeta)$ et celui de minimisation de la fonctionnelle $\mathscr{L}(\zeta)$ définie en (17.30), à condition de prendre $P_0 = \frac{I}{\lambda}$, $\bar{\zeta} = 0$, $R(t) = I$.

Le système (20.19) résulte alors du système (17.31). ■

Il suffit alors pour obtenir le filtre, de découpler le système (20.19).

Nous avons

Corollaire 20.2 : Il existe un opérateur $P_\lambda(t) \in \mathscr{L}(H; H)$ vérifiant

$$(P_\lambda(t)\, h,\, h) \geqslant 0 \qquad \forall\, h \in H,\ t \in [0, T] \quad (20.21)$$

$$\left.\begin{aligned} &P_\lambda(t) \text{ autoadjoint} \\ &t \to (P_\lambda(t)\, h,\, h') \text{ continue sur } [0, T],\ \forall\, h, h' \in H \end{aligned}\right\} \quad (20.22)$$

si $\varphi \in W(0, T)$ vérifie $-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\,\varphi \in L^2(0, T; H)$, alors on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(P_\lambda \varphi) + P_\lambda\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\,\varphi\right) + A\, P_\lambda\, \varphi + P_\lambda\, \mathscr{C}^*\, \mathscr{C}\, P_\lambda\, \varphi = 0 \\ &P_\lambda(0) = \frac{I}{\lambda}, \end{aligned}\right\} \quad (20.23)$$

et une fonction $r_\lambda(t) \in W(0, T)$ vérifiant

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_\lambda}{dt} + A\, r_\lambda + P_\lambda\, \mathscr{C}^*\, \mathscr{C}\, r_\lambda = P_\lambda\, \mathscr{C}^*\, z \\ &r_\lambda(0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (20.24)$$

et l'on a

$$\hat{y}_{T,\lambda} = r_\lambda(T). \quad (20.25)$$

Remarque 20.1 :

Nous avons noté, au cours de la démonstration du théorème 20.2, l'analogie entre le

problème déterministe (20.1), (20.6) et le problème d'estimation stochastique suivant : Etant donné le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = f \\ &y(0) = \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (20.26)$$

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\, y(t) + \eta(t) \qquad (20.27)$$

où on associe au couple $\{ \zeta , \eta(t) \}$ une mesure cylindrique, d'espérance mathématique $\{ 0 , 0 \}$ et d'opérateur de covariance

$$\begin{pmatrix} \frac{I}{\lambda} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

estimer l'état présent du système par la méthode des moindres carrés.

Remarque 20.2 : Dans (20.6), on a *régularisé* le critère $J(\zeta)$, par $|\zeta|^2_H$. On peut le régulariser en fait par n'importe quelle fonctionnelle $b(\zeta , \zeta) - 2(g , \zeta)$ *quadratique cœrcive.* L'élément de X sélectionné est alors celui qui réalise $\inf_{\zeta \in X} \{ b(\zeta , \zeta) - 2(g , \zeta) \}$. Ce résultat général sur la régularisation est dû à LIONS [35]. Bien entendu, le filtre approché dépend de la régularisation choisie.

21 - Système stochastique - Observation sans erreur.

21.1 - Hypothèses - Notations - Le problème.

Nous considérons, avec des hypothèses standard, le système défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = f + B(t)\, \xi(t) \\ &y(0) = \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (21.1)$$

Nous supposons que

$$\left.\begin{aligned} &\text{Au couple } \{ \xi , \zeta \} \text{ est associée sur } L^2(0, T; E) \times H, \text{ une mesure cylindrique} \\ &\text{d'espérance mathématique } \{ \overline{\xi} , \overline{\zeta} \} \text{ et d'opérateur de covariance} \\ &\qquad \begin{pmatrix} Q(t) & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix} \text{ où} \\ &P_0 \in \mathscr{L}(H ; H) \text{ est autoadjoint, défini positif et } \textit{inversible} \\ &Q(t) \in \mathscr{L}(E' ; E) \text{ est autoadjoint, défini positif et } \textit{inversible}, \ \forall\, t \in [\, 0, T \,]. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2)$$

Le système (21.1) est donc un système à entrées stochastiques, habituel. Par contre l'observation sera faite sans erreur, soit :

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\, y(t) \qquad (21.3)$$

où

$$\mathscr{C}(t) \in \mathscr{L}(H ; F) , \ \forall\, t \in [\, 0, T \,]. \qquad (21.4)$$

Le problème consiste à estimer l'état *présent* $y(T)$ du système (21.1).

21.2 - Définition de l'estimateur optimal.

Puisque l'observation se fait exactement, nous ferons l'hypothèse que l'ensemble X des éléments $\theta = \{ \xi(t) , \zeta \}$ définis par

$$X = \{ \theta = (\xi , \zeta) \,|\, z(t) = \mathscr{C}(t)\, y(t; \xi, \zeta) \} \text{ est non vide.} \qquad (21.5)$$

L'ensemble X est un convexe fermé de $L^2(0, T; E) \times H$. Pour estimer θ, nous utiliserons

le critère des moindres carrés, soit la fonctionnelle

$$\mathscr{L}(\theta) = J(\xi, \zeta) = \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt + \left(P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}\right). \tag{21.6}$$

Il existe un élément et un seul $\hat{\theta}$ de X vérifiant

$$\mathscr{L}(\hat{\theta}) = \inf_{\theta \in X} \mathscr{L}(\theta). \tag{21.7}$$

Définition 21.1 : On appelera estimateur optimal de θ, l'élément $\hat{\theta}$ défini par (21.7).

Lemme 21.1 : L'élément $\hat{\theta}$ vérifie la condition nécessaire et suffisante d'optimalité suivante :

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\hat{\xi}(t), \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt + (P_0^{-1}\hat{\zeta}, \zeta - \overline{\zeta}) \geqslant \\ &\int_0^T < Q^{-1}(t)\,\overline{\xi}(t), \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt + (P_0^{-1}\overline{\zeta}, \zeta - \overline{\zeta}) \\ &\forall\, \theta = \{\xi(t) \in L^2(0, T; E), \zeta \in H\} \in X. \end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

Démonstration : L'inéquation (21.8) n'est autre que la condition d'Euler correspondant à la minimisation de la fonctionnelle quadratique (21.6), sur le convexe fermé X.

Remarque 21.1 : Le lemme 21.1 permet de calculer l'estimateur optimal, si on sait résoudre l'inéquation (21.8) (cf. par exemple SIBONY [55]), mais ne conduit pas à un filtre.

Remarque 21.2 : Nous allons, en utilisant la pénalisation, déjà introduite au n° 6 du chapitre II, montrer que l'on peut définir un estimateur optimal approché, sous forme d'un filtre.

Remarque 21.3 : Notons que, ce que nous voulons calculer, c'est moins $\hat{\theta}$ que

$$\hat{y}_T = y(T; \hat{\theta}). \tag{21.9}$$

21.3 - Estimateur optimal approché.

21.3.1 - Equations donnant l'estimateur optimal approché.

Soit ϵ un nombre > 0, nous introduisons la fonctionnelle

$$\mathscr{L}_\epsilon(\theta) = \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\xi(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) - \overline{\xi}(t) > dt + \left(P_0^{-1}(\zeta - \overline{\zeta}), \zeta - \overline{\zeta}\right)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^T |z(t) - \mathscr{C}(t)\, y(t; \theta)|_H^2\, dt, \tag{21.10}$$

et nous cherchons à minimiser $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$ sur tout l'espace $L^2(0, T; E) \times H$. Soit $\hat{\theta}_\epsilon = (\hat{\xi}_\epsilon, \hat{\zeta}_\epsilon)$ l'élément réalisant la borne inférieure de $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$, donc

$$\mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) = \inf_\theta \mathscr{L}_\epsilon(\theta). \tag{21.11}$$

L'élément $\hat{\theta}_\epsilon$ est unique, car $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$ est une forme quadratique cœrcive. De plus $\hat{\theta}_\epsilon$ est la solution de l'équation d'Euler.

$$\begin{aligned} &\int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\hat{\xi}_\epsilon(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) > dt + \left(P_0^{-1}(\hat{\zeta}_\epsilon - \overline{\zeta}), \zeta\right) \\ &+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \Big(\mathscr{C}(t)\, y(t; \hat{\theta}_\epsilon) - z(t), \mathscr{C}(t)\, \tilde{y}(t; \theta)\Big)\, dt = 0 \qquad \forall\, \theta, \end{aligned} \tag{21.12}$$

en définissant $\tilde{y}(t;\theta)$ comme la solution de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tilde{y}}{dt} + A(t)\,\tilde{y} = B(t)\,\xi(t) \\ &\tilde{y}(0) = \zeta . \end{aligned}\right\} \qquad (21.13)$$

Posons

$$y_{T,\epsilon} = y(\hat{\theta}_\epsilon) \qquad (21.14)$$

et soit $p_{T,\epsilon}$ la solution de l'équation

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_{T,\epsilon}}{dt} + A^*(t)\,p_{T,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\left(-\mathscr{C}^*(t)\,z(t) + \mathscr{C}^*(t)\,\mathscr{C}(t)\,y_{T,\epsilon}\right) \\ &p_{T,\epsilon}(T) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21.15)$$

L'équation (21.12) donne alors

$$\int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\tilde{\xi}_\epsilon(t) - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) > dt + \left(P_0^{-1}(\tilde{\zeta}_\epsilon - \overline{\zeta}), \zeta\right) \qquad (21.16)$$

$$+ \int_0^T \left(\tilde{y}(t;\hat{\theta}), -\frac{dp_{T,\epsilon}}{dt} + A^*(t)\,p_{T,\epsilon}\right) dt = 0,$$

soit, après intégration par parties, il vient

$$\left(p_{T,\epsilon}(0), \zeta\right) + \left(P_0^{-1}(\tilde{\zeta}_\epsilon - \overline{\zeta}), \zeta\right) + \int_0^T \left(p_{T,\epsilon}, B(t)\,\xi(t)\right) dt$$

$$+ \int_0^T < Q^{-1}(t)\left(\tilde{\xi}_\epsilon - \overline{\xi}(t)\right), \xi(t) > dt = 0, \qquad (21.17)$$

d'où

$$\hat{\zeta}_\epsilon = \overline{\zeta} - P_0\,p_{T,\epsilon}(0) \qquad (21.18)$$

$$\hat{\xi}_\epsilon = \overline{\xi}(t) - Q(t)\,B^*(t)\,p_{T,\epsilon}(t) . \qquad (21.19)$$

Nous avons

Théorème 21.1 : Le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_{T,\epsilon}}{dt} + A(t)\,y_{T,\epsilon} + B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,p_{T,\epsilon} = B(t)\,\overline{\xi}(t) \\ &-\frac{dp_{T,\epsilon}}{dt} + A^*(t)\,p_{T,\epsilon} - \frac{1}{\epsilon}\,\mathscr{C}^*(t)\,\mathscr{C}(t)\,y_{T,\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon}\,\mathscr{C}^*(t)\,z(t) \\ &y_{T,\epsilon}(0) = \overline{\zeta} - P_0\,p_{T,\epsilon}(0) \\ &p_{T,\epsilon}(T) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21.20)$$

possède une solution unique et l'estimateur approché optimal est alors

$$\hat{y}_{T,\epsilon} = y_{T,\epsilon}(T) \qquad (21.21)$$

21.3.2 - **Filtre de l'estimateur optimal approché.**

Il suffit alors, pour obtenir le filtre de découpler le système (21.20). On obtient, comme conséquence de résultats déjà démontrés.

Corollaire 21.1 : Il existe un opérateur $P_\epsilon(t) \in \mathscr{L}(H;H)$ vérifiant

$$(P_\epsilon(t)\,h, h) \geqslant 0 \qquad \forall\, h \in H,\ t \in \left]0, T\right[\qquad (21.22)$$

$$\left.\begin{aligned} &P_\epsilon(t) \text{ autoadjoint} \\ &t \to (P_\epsilon(t)\,h, h') \text{ continue sur } \left[0, T\right],\ \forall\, h, h' \in H \end{aligned}\right\} \qquad (21.23)$$

si $\varphi \in W(0, T)$ vérifie $-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi \in L^2(0, T; H)$, alors on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(P_\epsilon \varphi) + P_\epsilon\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\varphi\right) \\ &+ A P_\epsilon \varphi + \frac{P_\epsilon \mathscr{C}^*(t)\mathscr{C}(t) P_\epsilon \varphi}{\epsilon} = B(t) Q(t) B^*(t)\varphi \\ &P_\epsilon(0) = P_0, \end{aligned}\right\} \quad (21.24)$$

et une fonction $r_\epsilon(t) \in W(0, T)$ vérifiant

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_\epsilon}{dt} + A(t) r_\epsilon + \frac{P_\epsilon \mathscr{C}^*(t)\mathscr{C}(t)}{\epsilon} r_\epsilon = P_\epsilon \mathscr{C}^*(t) z(t) \\ &r_\epsilon(0) = \overline{\zeta} \end{aligned}\right\} \quad (21.25)$$

et on a

$$\hat{y}_{T,\epsilon} = r_\epsilon(T). \quad (21.26)$$

21.4 - **Théorème de convergence.**

Nous allons démontrer maintenant la convergence de l'estimateur optimal approché $\hat{y}_{T,\epsilon}\left(= r_\epsilon(T)\right)$ vers l'estimateur optimal $\hat{y}_T$, $\forall T$, lorsque $\epsilon \to 0$.

Théorème 21.2 : Hypothèses et notations de 21.1. Pour tout T fixé, on a

$$\hat{y}_{T,\epsilon} \to \hat{y}_T \text{ fortement dans H, lorsque } \epsilon \to 0. \quad (21.26)$$

Démonstration :

L'application

$$\theta = \{\xi, \zeta\} \to y(T; \theta) \quad (21.27)$$

définie par (21.1), étant affine continue, il suffit pour démontrer le théorème de prouver que

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\xi}_\epsilon \to \hat{\xi} \text{ fortement dans } L^2(0, T; E) \\ &\hat{\zeta}_\epsilon \to \hat{\zeta} \text{ fortement dans H.} \end{aligned}\right\} \quad (21.28)$$

Or, on a

$$\mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) = \inf_\theta \mathscr{L}_\epsilon(\theta) \leqslant \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}) = \mathscr{L}(\hat{\theta}) = \inf_{\theta \in X} \mathscr{L}(\theta), \quad (21.29)$$

d'où

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) \leqslant \limsup_{\epsilon \to 0} \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) \leqslant \inf_{\theta \in X} \mathscr{L}(\theta). \quad (21.30)$$

D'autre part, d'après la forme (21.10) de $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$, il existe un nombre $\beta > 0$ tel que

$$\alpha\left\{\int_0^T |\hat{\xi}_\epsilon(t) - \overline{\xi}(t)|^2 dt + |\hat{\zeta}_\epsilon - \overline{\zeta}|^2\right\} \leqslant \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon). \quad (21.31)$$

Il résulte alors de (21.30), que $\hat{\xi}_\epsilon$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; E)$, et que $\hat{\zeta}_\epsilon$ demeure dans un borné de H. Soit donc, encore notée $\hat{\xi}_\epsilon$, $\hat{\zeta}_\epsilon$ une sous suite extraite faiblement convergente dans $L^2(0, T; E) \times H$ vers un élément $\{\xi^*, \zeta^*\}$.

D'autre part de (21.30) et de l'expression (21.10) de $\mathscr{L}_\epsilon(\theta)$, il résulte que

$$\int_0^T |z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \hat{\xi}_\epsilon, \hat{\zeta}_\epsilon)|_F^2 dt \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0, \quad (21.32)$$

mais on a

$$\int_0^T | z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \xi^*, \zeta^*) |_F^2 \, dt$$

$$\leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} \int_0^T | z(t) - \mathscr{C}(t) y(t; \hat{\xi}_\epsilon, \hat{\zeta}_\epsilon) |_F^2 \, dt , \qquad (21.33)$$

ce qui tend vers 0, donc

$$\theta^* = \{ \xi^*, \zeta^* \} \text{ appartient au convexe X.} \qquad (21.34)$$

De plus, on a

$$\mathscr{L}(\theta^*) \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} \mathscr{L}(\hat{\theta}_\epsilon) \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} \mathscr{L}_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon) , \qquad (21.35)$$

donc d'après (21.30), on a obligatoirement

$$\mathscr{L}(\theta^*) = \inf_{\theta \in X} \mathscr{L}(\theta) , \qquad (21.36)$$

d'où $\theta^* = \hat{\theta}$. En raison de l'unicité de la limite de toute sous suite extraite, on a

toute la suite $\hat{\theta}_\epsilon$ converge faiblement vers $\hat{\theta}$, lorsque $\epsilon \to 0$. *(21.37)*

D'autre part, en raison de (21.30) et (21.35), on a

$$\mathscr{L}(\hat{\theta}_\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\to} \mathscr{L}(\hat{\theta}) , \qquad (21.38)$$

ce qui, avec la convergence faible, entraîne la convergence forte.

Remarque 21.4 : La méthode de pénalisation possède une interprétation statistique analogue à celle de la régularisation (cf. remarque 20.1). Il faut mettre en regard le problème (21.1) et (21.10) et le problème stochastique suivant : Etant donné le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t) y = f(t) + B(t) \xi(t) \\ &y(0) = \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (21.39)$$

$$z(t) = \mathscr{C}(t) y(t) + \eta(t) \qquad (21.40)$$

où on associe à $\{ \xi, \zeta, \eta \}$ une mesure cylindrique sur $L^2(0, T; E) \times H \times L^2(0, T; F)$ d'espérance mathématique $\{ \overline{\xi}, \overline{\zeta}, 0 \}$ et d'opérateur de covariance défini par la matrice d'opérateurs

$$\begin{pmatrix} Q(t) & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon I \end{pmatrix} ,$$

estimer l'état présent par la méthode des moindres carrés.

§ 5 : Remarques générales sur la contrôlabilité et l'observabilité.

22 - Orientation générale - Contrôlabilité.

22.1 - Orientation.

Les notions de contrôlabilité et d'observabilité ont été introduites, dans le cas de la dimension finie, par R.-E. KALMAN [28]. Elles ont été ensuite considérablement étudiées par BUCY [13], AOKI [2],...

Dans le cas des systèmes stochastiques, ces notions sont très liées à l'étude de l'équation de Riccati. Le but de ce paragraphe est d'adapter certaines définitions et remarques bien connues en dimension finie, dans le cas des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

22.2 - **Contrôlabilité.**

22.2.1 - **Hypothèses - Notations.**

Nous considérons le système (complètement déterministe)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = B(t)\, u(t) \qquad t \in \left]\, t_0 , T \,\right[\\ &y(t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22.1)$$

Les hypothèses sur A (t) sont standard, avec

$$< A(t)\, \varphi , \varphi > \geqslant \alpha \| \varphi \|^2_V \qquad \forall\, t \in \left[\, t_0 , T \,\right]. \qquad (22.2)$$

Le contrôle $u \in L^2 \left[\, t_0 , T; E \,\right]$ avec

$$B(t) \in \mathcal{L}(E; H) , \forall\, t \text{ et } \sup_{t \in \left[\, t_0 , T \,\right]} \| B(t) \|_{\mathcal{L}(E; H)} \text{ borné.} \qquad (22.3)$$

Nous adopterons la

Définition 22.1 : On dira que le système (22.1) est contrôlable à l'instant T si, y (T , t_0 ; u) désignant la valeur de la solution de (22.1) à l'instant T, y (T, t_0 ; u) parcourt un espace dense dans H, lorsque u parcourt L^2 (t_0 , T; E).

Remarque 22.1 : La définition 22.1 implique que, pour tout élément z de H, il est possible de trouver un contrôle qui amène le système (22.1) dans un état aussi voisin (en norme) de z que l'on veut.

Remarque 22.2 : La définition 22.1 est l'adaptation naturelle en dimension infinie, de la définition correspondante en dimension finie.

22.2.2 - **Définition stochastique de la contrôlabilité déterministe.**

En dimension finie, il est connu que la définition 22.1 a une analogue stochastique. Nous allons voir que la même propriété existe en dimension infinie. Nous introduisons le système stochastique suivant :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y = B(t)\, \xi(t) \\ &y(t_0) = 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (22.4)$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\text{on associe à } \xi(t) \text{ une mesure cylindrique sur } L^2(t_0 , T; E), \text{ d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance I = identité. } \xi \text{ est donc un « bruit} \\ &\text{blanc ».} \end{aligned}\right\} \qquad (22.5)$$

Si y (T, t_0) désigne l'état du système à l'instant T, il existe une mesure cylindrique sur H associée par l'application linéaire et continue $\bar{\xi} \to y$ (T, t_0 ; ξ), de L^2 (t_0 , T; E) dans H. On adoptera la

Définition 22.2 : Le modèle stochastique (22.4) (avec l'hypothèse (22.5)) sera appelé *« version stochastique »* du système contrôlé (22.1) ■

On peut alors donner la définition suivante de la contrôlabilité déterministe

Définition 22.3 : Le système (22.1) sera dit contrôlable, si dans sa version stochastique, l'opérateur de covariance de l'état y (T, t_0) est défini positif ■

Nous avons

Proposition 22.1 : Les définitions 22.1 et 22.3 sont *équivalentes.*

Démonstration : Nous nous appuierons sur le lemme suivant.

Lemme 22.1 [1] : Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (22.1) soit contrôlable est que l'on ait :

$$M(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} G(T, t)\, B(t)\, B^*(t)\, G^*(T, t)\, dt > 0, \qquad (22.6)$$

où $G(T, t)$ est l'opérateur de Green associé à $A(t)$ (cf. 17.2.2).

Démonstration :

a) *Condition suffisante :* En intégrant (22.1) nous obtenons

$$y(T, t_0 ; u) = \int_{t_0}^{T} G(T, t)\, B(t)\, u(t)\, dt. \qquad (22.7)$$

Prenons alors un contrôle u de la forme

$$u(t) = B^*(t)\, G^*(T, t)\, \xi, \qquad (22.8)$$

où $\xi \in H$. L'équation (22.7) donne alors

$$y(T, t_0 ; u) \quad M(T, t_0)\, \xi. \qquad (22.9)$$

Or $M(T, t_0)$ est un opérateur appartenant à $\mathcal{L}(H; H)$, autoadjoint, défini positif, par hypothèse. Il en résulte que l'ensemble des valeurs $R \mid M(T, t_0) \mid$ est dense dans H (cf. par exemple YOSIDA [61]). L'ensemble (22.9) est donc dense dans H, et le système (22.1) est contrôlable.

b) *condition nécessaire :*

Si (22.6) n'est pas vrai, alors il existe a non nul appartenant à H, tel que

$$\left(\int_{t_0}^{T} G(T, t)\, B(t)\, B^*(t)\, G^*(T, t)\, dt\, a\, ,\, a\right) = 0 \qquad (22.10)$$

donc

$$\int_{t_0}^{T} \left(B^*(t)\, G^*(T, t)\, a\, ,\, B^*(t)\, G^*(T, t)\, a\right) dt = 0 \qquad (22.11)$$

soit

$$B^*(t)\, G^*(T, t)\, a = 0 \qquad p.\, p.\, t. \qquad (22.12)$$

Soit alors $\varphi \in W(t_0, T)$ la solution de

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\, \varphi = 0 \qquad & t \in \left] t_0, T \right[\\ \varphi(T) = a. & \end{aligned}\right\} \qquad (22.13)$$

Nous avons

$$\varphi(t) = G^*(T, t)\, a. \qquad (22.14)$$

Par ailleurs, en multipliant la première équation (22.13) par $y(t ; u)$ solution de (22.1) et intégrant par parties, il vient

$$0 = \int_{t_0}^{T} \left(y(t; u)\, ,\, -\frac{d\varphi}{dt} + A^*(t)\, \varphi \right) dt = -\left(a\, ,\, y(T; u)\right)$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left(\varphi\, ,\, B(t)\, u(t)\right) dt\, , \qquad (22.15)$$

---

(1) cf. WANG [59].

soit

$$\left(a\ ,\ y\ (\mathrm{T};\ u)\right) = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(u\ (t)\ ,\ \mathrm{B}^*\ (t)\ \mathrm{G}^*\ (\mathrm{T},\ t)\ a\right) = 0\ , \tag{22.16}$$

d'où d'après (22.12)

$$\left(a\ ,\ y\ (\mathrm{T};\ u)\right) = 0 \qquad \forall\ u \in \mathrm{L}^2\ (t_0\ ,\ \mathrm{T};\ \mathrm{E})\ , \tag{22.17}$$

ce qui implique que $y\ (\mathrm{T},\ t_0\ ;\ u)$ ne parcourt pas un espace dense dans H.

Suite de la démonstration de la proposition 22.1.

Il suffit donc, pour démontrer la proposition, de calculer l'opérateur de covariance de l'état $y\ (\mathrm{T},\ t_0)$ du système (22.4) et de montrer qu'il est identique à $\mathrm{M}\ (\mathrm{T},\ t_0)$. Soit $h \in \mathrm{H}$ quelconque.

Considérons la solution ψ_h de

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\psi_h}{dt} + \mathrm{A}^*\ (t)\ \psi_h = 0 \qquad t \in\ ]\ t_0\ ,\ \mathrm{T}\ [\\ \psi_h\ (\mathrm{T}) = h. \end{aligned}\right\} \tag{22.18}$$

Les équations (22.4) et (22.18) donnent alors

$$0 = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(\ y\ (t\ ;\ \xi)\ ,\ -\frac{d\psi_h}{dt} + \mathrm{A}^*\ (t)\ \psi_h\right)\ dt = -\left(h\ ,\ y\ (\mathrm{T},\ t_0\ ;\ \xi)\right)$$

$$+ \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(\psi_h\ ,\ \mathrm{B}\ (t)\ \xi\ (t)\right)\ dt \tag{22.19}$$

d'où

$$\left(\ y\ (\mathrm{T},\ t_0\ ;\ \xi)\ ,\ h\right) = \int_0^{\mathrm{T}} \left(\xi\ (t)\ ,\ \mathrm{B}^*\ (t)\ \psi_h\ (t)\right)\ dt. \tag{22.20}$$

On déduit alors de la formule (22.20) la valeur de l'opérateur de covariance $\Lambda\ (\mathrm{T},\ t_0)$ de $y\ (\mathrm{T},\ t_0)$, soit :

$$\left(\ \Lambda\ (\mathrm{T},\ t_0)\ h\ ,\ h'\right) = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{B}^*\ (t)\ \psi_h\ (t)\ ,\ \mathrm{B}^*\ (t)\ \psi_{h'}\ (t)\right)\ dt\ , \tag{22.21}$$

et comme on a

$$\psi_h\ (t) = \mathrm{G}^*\ (\mathrm{T},\ t)\ h\ , \tag{22.22}$$

la formule (22.21) donne alors

$$\left(\Lambda\ (\mathrm{T},\ t_0)\ h\ ,\ h'\right) = \left(\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{G}\ (\mathrm{T},\ t)\ \mathrm{B}\ (t)\ \mathrm{B}^*\ (t)\ \mathrm{G}^*\ (\mathrm{T},\ t)\ dt\ h\ ,\ h'\right)\ , \tag{22.23}$$

et en comparant (22.6) et (22.23), on voit que

$$\Lambda\ (\mathrm{T},\ t_0) = \mathrm{M}\ (\mathrm{T},\ t_0). \tag{22.24}$$

Remarque 22.1 : Bien entendu si on considère un système

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + \mathrm{A}\ (t)\ y = f + \mathrm{B}\ (t)\ u\ (t) \\ y\ (0) = y_0 \end{aligned}\right\} \tag{22.25}$$

il est contrôlable si et seulement si, le système homogène (f , y_0 nuls) correspondant est contrôlable.

22.3 - **Définition de la contrôlabilité des systèmes stochastiques.**

On peut alors étendre la définition 22.3 au cas suivant : Considérons le système stochas-

tique défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = f + B(t)\,\xi(t) \qquad t \in [\,t_0\,,\,T\,[\\ &y(t_0) = y_0\,, \end{aligned}\right\} \quad (22.26)$$

dans lequel f et y_0 sont donnés, respectivement dans $L^2(t_0\,,\,T;\,H)$ et H.

On associe à ξ une mesure cylindrique sur $L^2(t_0\,,\,T;\,E)$, d'espérance mathématique $\overline{\xi}(t)$, et d'opérateur de covariance Q (t) où Q (t) , $t \in [\,t_0\,,\,T\,]$ est auto-adjoint, défini positif et inversible. (22.27)

Soit M (T, t_0) l'opérateur de covariance de l'état y (T, t_0) du système (22.26). Nous pouvons le calculer de manière analogue à la démonstration de la proposition 22.1. Soit $h \in H$ et ψ_h défini par (22.18). On a

$$0 = \int_{t_0}^{T} \left(y(t\,;\,\xi)\,,\, -\frac{d\psi_h}{dt} + A^*(t)\,\psi_h \right) dt = -\left(h\,,\,y(T,\,t_0\,;\,\xi)\right)$$

$$+ \left(\psi_h(0)\,,\,y_0\right) + \int_{t_0}^{T} \left(\psi_h\,,\,f + B(t)\,\xi(t)\right) dt\,, \qquad (22.28)$$

soit

$$\left(y(T,\,t_0)\,,\,h\right) = \left(\psi_h(t_0)\,,\,y_0\right) + \int_{t_0}^{T} \left(f\,,\,\psi_h\right) dt$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left(\xi(t)\,,\,B^*(t)\,\psi_h(t)\right) dt. \qquad (22.29)$$

De la formule (22.29), on déduit aussitôt que

$$\left.\begin{aligned} &\text{espérance mathématique de } y(T,\,t_0) = G(T,\,t_0)\,y_0 \\ &\qquad + \int_{t_0}^{T} G(T,\,t)\left(f(t) + B(t)\,\xi(t)\right) dt \end{aligned}\right\} \quad (22.30)$$

$$M(T,\,t_0) = \int_{t_0}^{T} G(T,\,t)\,B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,G^*(T,\,t)\,dt. \qquad (22.31)$$

On adoptera alors la

Définition 22.4 : On dira que le système (22.26) est stochastiquement contrôlable si l'opérateur de covariance M (T, t_0) est défini positif. L'opérateur M (T, t_0) s'appelle *opérateur de contrôlabilité stochastique.* ■

L'instant *présent* étant représenté par T, il est intéressant de faire varier l'instant initial $t_0 \leqslant T$. On adoptera alors la

Définition 22.5 : Le système (22.26) sera dit *uniformément stochastiquement contrôlable* si l'opérateur de contrôlabilité stochastique M (T, t_0) demeure borné uniformément pour tout $t_0 \leqslant T$.

23 - Observabilité.

23.1 - Observabilité déterministe.

On considère le modèle (complètement déterministe)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = f \qquad t \in]\,t_0\,,\,T\,[\\ &y(t_0) = v. \end{aligned}\right\} \quad (23.1)$$

Les hypothèses sont standard. La fonction f est donnée, par exemple dans $L^2(0,\,T;\,H)$. l'état initial v du système *n'est pas connu* (mais n'est pas stochastique). On dispose

d'une observation

$$z = \mathscr{C}\, y\,(v) \qquad (23.2)$$

où

$$\mathscr{C} \in \mathscr{L}\big(\mathrm{W}\,(t_0\,,\,\mathrm{T})\,;\,\mathrm{K}\big)\ ;\ \mathrm{K}\ \text{espace de Hilbert des observations.} \qquad (23.3)$$

On introduira alors la

Définition 23.1 : Le système (23.1), (23.2) sera dit *complètement observable* si l'espace parcouru par $\mathscr{C}\, y\,(v)$, lorsque v parcourt H, est dense dans K.

Remarque 23.1 : La définition 23.1 signifie qu'il est possible, pour toute valeur de l'observation, de définir un système (23.1), dont la *sortie* soit aussi proche (en norme) que l'on veut de l'observation réelle.

Remarque 23.2 : En réalité il faut distinguer trois ensembles. L'ensemble

$$\mathrm{Z} = \{\, v \in \mathrm{H} \,|\, z = \mathscr{C}\, y\,(v)\,\}\ , \qquad (23.4)$$

sa fermeture $\overline{\mathrm{Z}}$ dans K et K. L'observabilité d'un système dépend de l'observation z. Si on prend z dans Z ou $\overline{\mathrm{Z}}$, comme nous l'avons fait en 20.2, il y a stricte observabilité au sens de la remarque 23.1. Le problème est alors de définir un *algorithme* pour estimer le système. Il semble, en principe, que l'hypothèse $z \in \mathrm{Z}$ soit raisonnable, puisque le système physique étudié réalise au moins une possibilité. Cependant, on rencontre alors dans la pratique le problème de *l'instabilité.* L'observation z est mesurée, donc elle diffère un peu de la sortie réelle du système. Il est donc important de savoir si il y a observabilité pour tout z appartenant à K.

23.2 - Un cas de système complètement observable.

Nous empruntons l'exemple suivant à J.-L. LIONS [1] [35].

Nous prenons

$$\mathrm{K} = \mathrm{H} \qquad (23.4)$$

$$\mathscr{C}\, y\,(v) = y\,(\mathrm{T};\, v). \qquad (23.5)$$

Montrons alors que $y\,(\mathrm{T};\, v)$ parcourt un espace dense dans H, lorsque v parcourt H. Nous pouvons toujours supposer par translation que f est nul. Alors si la propriété n'est pas vraie, il existerait un $h \in \mathrm{H}$ *tel que*

$$\big(h\ ,\, y\,(\mathrm{T};\, v)\big) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{H}. \qquad (23.6)$$

On introduit alors $z \in \mathrm{W}\,(t_0\,,\,\mathrm{T})$ solution de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dz}{dt} + \mathrm{A}^*\,(t)\, z = 0 \qquad t \in \left]\, t_0\,,\,\mathrm{T}\,\right[\\ &z\,(\mathrm{T}) = h\ , \end{aligned}\right\} \qquad (23.7)$$

alors on a

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(-\frac{dz}{dt} + \mathrm{A}^*\,(t)\, z\ ,\, y\,(t\,;\, v) \right) dt = 0 = -\big(h\ ,\, y\,(\mathrm{T};\, v)\big) + \big(z\,(0),\, v\big)\ , \qquad (23.8)$$

soit, en raison de (23.6)

$$\big(z\,(t_0)\ ,\, v\big) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{H}\ , \qquad (23.9)$$

---

(1) où l'on trouvera également d'autres exemples.

d'où $z(t_0) = 0$. Mais, en raison de l'unicité rétrograde [39] [32], ceci implique $z = 0$, soit $h = 0$.

Remarque 23.3 : La propriété Z = H est fausse (irreversibilité des équations paraboliques cf. [32]).

23.3 - Observabilité des systèmes stochastiques.

23.3.1 - Hypothèses - Notations.

On considère le modèle stochastique

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = f + B(t)\,\xi(t) \qquad t \in \left]\, t_0 , T \,\right[\\ &y(t_0) = \zeta . \end{aligned}\right\} \quad (23.10)$$

Les hypothèses sont standard. L'observation sur le système est définie par

$$z(t) = \mathscr{C}(t)\,y(t) + \eta(t) , \; t \in \left]\, t_0 , T \,\right[. \quad (23.11)$$

On fera sur le triplet $\{ \xi , \zeta , \eta \}$ les hypothèses stochastiques habituelles (cf. (3.9)). Bien entendu, on ne peut pas espérer trouver un système, dont la sortie soit aussi proche que l'on veut de l'observation réelle.

Cependant on dispose d'un estimateur de l'état présent $y(T)$ du système. Soit $r(T, t_0)$ cet estimateur, $\epsilon(T, t_0)$ l'erreur correspondante et $P(T, t_0)$ l'opérateur de covariance correspondant à cette erreur. On sait (cf. Théorème 5.4) que $P(T, t_0)$ est solution de l'équation de Riccati

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt} P(t , t_0) + A(t)\,P(t , t_0) + P(t , t_0)\,A^*(t) \\ &\quad + P(t , t_0)\,D_2(t)\,P(t , t_0) = D_1(t) \\ &P(t_0 , t_0) = P_0 . \end{aligned}\right\} \quad (23.12)$$

On peut se demander ce qui se passe, lorsque on accroit la quantité d'observation disponible au temps T, ce qui peut se faire en diminuant t_0 [1].

On peut espérer améliorer l'estimateur de l'état présent, ou tout au moins ne pas le détériorer. La mesure naturelle de la qualité d'un estimateur est l'opérateur de covariance de l'erreur qui lui correspond. C'est pourquoi nous adopterons les deux définitions suivantes :

Définition 23.2 : Le système (23.10), (23.11) sera dit stochastiquement observable au sens strict si

$$(P(T, t_0)\,h , h') \to 0 \text{ lorsque } t_0 \to -\infty , \; \forall\, h , h' \quad (23.13)$$

Définition 23.3 : Le système (23.10), (23.11) sera dit stochastiquement observable au sens large si

$$P(T, t_0) \text{ demeure borné en norme lorsque } t_0 \to -\infty . \quad (23.14)$$

23.3.2 - Un cas d'observabilité stochastique au sens large.

Nous nous plaçons dans le cadre du n° 14, c'est-à-dire

$$P_0 = 0 \quad (23.15)$$

$$< A(t)\,\varphi , \varphi > \geqslant \alpha \,\|\, \varphi \,\|^2_V , \; \forall\, t \leqslant T ; \; \forall\, \varphi \in V , \; \alpha > 0. \quad (23.16)$$

---

(1) Autrement dit, on tient compte de plus en plus d'information dans le passé.

Alors, comme nous l'avons vu au n° 14.4, l'opérateur de covariance $P(T, t_0) \underset{t_0 \to -\infty}{\to} P_\infty(T)$ (au sens de 14.32), et (23.14) a lieu. Donc le système (23.10), (23.11) avec (23.15), (23.16) est stochastiquement observable au sens large. De plus dans le cas stationnaire, comme nous l'avons vu en (14.31), $P_\infty(T)$ est indépendant de T.

23.3.3 - **Une propriété de décomposition des systèmes.**

Nous allons utiliser les majorations obtenues dans la proposition 17.5. Nous avons

$$\left(P(T, t_0)\, h\,,\, h\right) \leqslant \left(G(T, t_0)\, P_0\, G^*(T, t_0)\, h\,,\, h\right) \qquad (23.17)$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left(G(T, t)\, D_1(t)\, G^*(T, t)\, h\,,\, h\right) dt$$

et

$$P_1(T, t_0) = G(T, t_0) \left(P_0^{-1} + \int_{t_0}^{T} G^*(t\,,\, t_0)\, D_2(t)\, G(t\,,\, t_0)\, dt\right)^{-1} G^*(T, t_0)\,. \qquad (23.18)$$

D'autre part, en raison du théorème d'optimalité 17.1, on a

$$\left(P(T, t_0)\, h\,,\, h\right) \leqslant \left(\Lambda_{P_1} h\,,\, h\right), \qquad (23.19)$$

où $\left(\Lambda_{P_1} h\,,\, h\right)$ est donnée par la formule (17.18), soit de la manière suivante : On introduit l'équation

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\gamma_1}{dt} + \left(A^*(t) + D_2(t)\, P_1(t\,,\, t_0)\right)\gamma_1 = 0 \qquad t \in \left]\, t_0\,,\, T\,\right[\\ \gamma_1(T) = h, \end{aligned}\right\} \qquad (23.20)$$

et alors

$$\left(\Lambda_{P_1} h\,,\, h\right) = \left(P_0\, \gamma_1(t_0)\,,\, \gamma_1(t_0)\right) \qquad (23.21)$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left(D_1(t)\, \gamma_1(t)\,,\, \gamma_1(t)\right) dt$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left(D_2(t)\, P_1(t\,,\, t_0)\, \gamma_1(t)\,,\, P_1(t\,,\, t_0)\, \gamma_1(t)\right) dt.$$

Or on a, puisque $P_1(t\,,\, t_0)$ correspond au gain optimal dans le cas B = 0 (soit $D_1 = 0$)

$$\left(P_1(T, t_0)\, h\,,\, h\right) = \left(P_0\, \gamma_1(t_0)\,,\, \gamma_1(t_0)\right) \qquad (23.22)$$

$$+ \int_{t_0}^{T} dt \left(D_2(t)\, P_1(t\,,\, t_0)\, \gamma_1(t)\,,\, P_1(t\,,\, t_0)\, \gamma_1(t)\right)$$

de sorte que (23.19) donne

$$\left(P(T, t_0)\, h\,,\, h\right) \leqslant \left(P_1(T, t_0)\, h\,,\, h\right) + \int_{t_0}^{T} \left(D_1(t)\, \gamma_1(t)\,,\, \gamma_1(t)\right) dt. \qquad (23.23)$$

Rappelons que l'on a par contre (Proposition 17.4)

$$\left(P(T, t_0)\, h\,,\, h\right) \geqslant \left(P_1(T, t_0)\, h\,,\, h\right). \qquad (23.24)$$

Les majorations (23.17) et (23.23) nous indiquent certains cas d'observabilité stochastique au sens large. On introduit les quatre systèmes suivants

système I

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\gamma_1}{dt} + A(t)\, \gamma_1 = f \\ &\gamma_1(t_0) = \zeta \\ &\text{aucune observation.} \end{aligned}\right. \qquad (23.25)$$

système II

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_2}{dt} + A(t)\, y_2 = f + B(t)\, \xi(t) \\ y_2(t_0) = 0 \\ \text{aucune observation.} \end{array}\right. \qquad (23.26)$$

système III

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_3}{dt} + A(t)\, y_3 = f. \\ y_3(t_0) = \zeta \\ \text{observation } z(t) = \mathscr{C}(t)\, y_3(t) + \eta(t)\,,\ t \in \left]\, t_0\,, T\,\right[\,. \end{array}\right. \qquad (23.27)$$

système IV

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_4}{dt} + \big(A(t) + P_1(t\,,\, t_0)\, D_2(t)\big)\, y_4 = f + B\, \xi(t) \\ y_4(t_0) = 0 \\ \text{aucune observation.} \end{array}\right. \qquad (23.28)$$

Nous avons alors les équivalences suivantes :

système II stochastiquement observable au sens large $\Longleftrightarrow$
$G(T, t_0)\, P_0\, G^*(T, t_0)$ demeure borné en norme lorsque $t_0 \to -\infty$. *(23.29)*

système I uniformément stochastiquement contrôlable $\Longleftrightarrow$
$\int_{t_0}^{T} G(T, t)\, D_1(t)\, G^*(T, t)\, dt$ demeure borné en norme
lorsque $t_0 \to -\infty$. *(23.30)*

$P_1(T, t_0)$ demeure borné en norme lorsque $t_0 \to -\infty \Longleftrightarrow$
système III stochastiquement observable au sens large. *(23.31)*

si $\overline{G}(t\,,\, \tau)$ désigne la fonction de Green associée à l'opérateur
$A(t) + D_2(t)\, P_1(t\,,\, t_0)$, alors $\int_{t_0}^{T} \overline{G}(T, t)\, D_1(t)\, \overline{G}^*(T, t)\, dt$
demeure borné en norme lorsque $t_0 \to -\infty \Longleftrightarrow$ système IV est uniformément stochastiquement contrôlable. *(23.32)*

d'où

Proposition 23.1 : Le système (23.10), (23.11) est stochastiquement observable au sens large si l'une *ou* l'autre des conditions suivantes est vérifiée

Le système I est stochastiquement observable au sens large et le système II est uniformément stochastiquement contrôlable. *(23.33)*

le système III est stochastiquement observable au sens large et le système IV est uniformément stochastiquement contrôlable. *(23.34)*

CHAPITRE IV

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les résultats numériques correspondant à chacune des deux méthodes d'identification, proposées dans les Chapitres I et II, la méthode Bayésienne et la méthode des moindres carrés.
Le numéro 1 est consacré à l'application de la méthode Bayésienne et le numéro 2 à l'application de la méthode des moindres carrés. La programmation a été réalisée pour le n° 1, par J.-P. YVON, de l'Institut de Recherche en Informatique et Automatique, et pour le n° 2 par C. LE MARÉCHAL, de la Faculté des Sciences de Toulouse, avec la collaboration de J.-P. YVON.
Le plan est le suivant :

1. *Simulation de l'algorithme d'estimation bayésienne.*
   - 1.1. Le modèle.
   - 1.2. Application de l'algorithme (6.2), Chap. I.
   - 1.3. Résultats numériques.
2. *Identification de valeur initiale.*
   - 2.1. Le modèle.
   - 2.2. Méthode.
   - 2.3. Résultats numériques.

1 - Simulation de l'algorithme d'estimation bayésienne.

1.1 - Le modèle.

Nous adaptons ici l'algorithme décrit au n° 6, chapitre I.

Le système est défini par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} - u\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \gamma \operatorname{Cos} \pi x\, e^{\beta \pi^2 t}\ , x \in]\,0,\,1\,[\ , t \in]\,0,\,T\,[\\ &\frac{\partial y}{\partial x}(t,\,0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t,\,1) = 0 \\ &\quad y\,(0,\,x) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Le paramètre à identifier est le coefficient u. Les quantités β et γ sont des constantes convenables. Le choix du second membre dans (1.1) a été fait, de façon à ce qu'une intégration directe de (1.1) soit possible, pour toute valeur fixée de u, ce qui permet les vérifications. Il est aisé de voir que la solution de (1.1) est donnée par

$$y\,(t\,,\,x\,;\,u) = \left\{ \frac{-\gamma\, e^{-u\ \pi^2 t}}{(u+\beta)\,\pi^2} + \frac{\gamma\, e^{\beta\,\pi^2 t}}{(u+\beta)\,\pi^2} \right\} \operatorname{Cos} \pi x. \qquad (1.2)$$

L'observation est définie par :

$$z\,(t) = y\,(t,\,0;\,u_0) + \eta\,(t)\ ,\ t \in [\,0,\,T\,]\,, \qquad (1.3)$$

où u_0 désigne la valeur vraie du paramètre, et $\eta\,(t)$ représente l'erreur d'observation. L'erreur $\eta\,(t)$ est caractérisée mathématiquement, par la donnée d'une mesure cylindrique sur $L^2\,(0,\,T)$, d'espérance mathématique 0 et d'opérateur de covariance σ^2 I.

1.2 - Application de l'algorithme (6.2). Chapitre I.

L'espace des observations K est alors $L^2\,(0,\,T)$. Nous considérons un découpage du temps, soit

$$[\,0,\,h\,,\,2\,h\,,\,\ldots\,,\,N\,h = T\,].$$

On considère alors les éléments de $L^2\,(0,\,T)$, soit

$$e_h^j \equiv e_h^j\,(t) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{h}} \text{ si } t \in [\,(j-1)\,h\,,\,j\,h\,]\,, j = 1,\ldots N\,, \\ 0 \text{ ailleurs,} \end{array} \right. \qquad (1.4)$$

qui constituent un système orthonormé. L'espace K_h est le sous espace de K, engendré par les vecteurs e_h^j. Le vecteur $\tau_h\, Y_d$ est alors défini de la manière suivante : La composante $(\tau_h\, Y_d)_j$ est donnée par

$$(\tau_h\, Y_d)_j = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{jh}^{(j+1)\,h} \left\{ \frac{-\gamma\, e^{-u_0\,\pi^2 t}}{(u_0+\beta)\,\pi^2} + \frac{\gamma\, e^{\beta\,\pi^2 t}}{(u_0+\beta)\,\pi^2} \right\} dt + \zeta_j \qquad (1.5)$$

où ζ_j est la réalisation d'une variable aléatoire normale, de moyenne 0 et d'écart type σ. On engendre ζ_j par l'ordinateur, à l'aide d'un programme de génération de nombres au hasard. La quantité $\overline{Y}\,(u)$ définie au n° 6.1 du chapitre I, est ici

$$\overline{Y}\,(u) = y\,(t\,,\,0\,;\,u)\,, \qquad (1.6)$$

résultant de l'intégration de (1.1). Nous sommes dans le cadre de la remarque 3.1.

figure 1

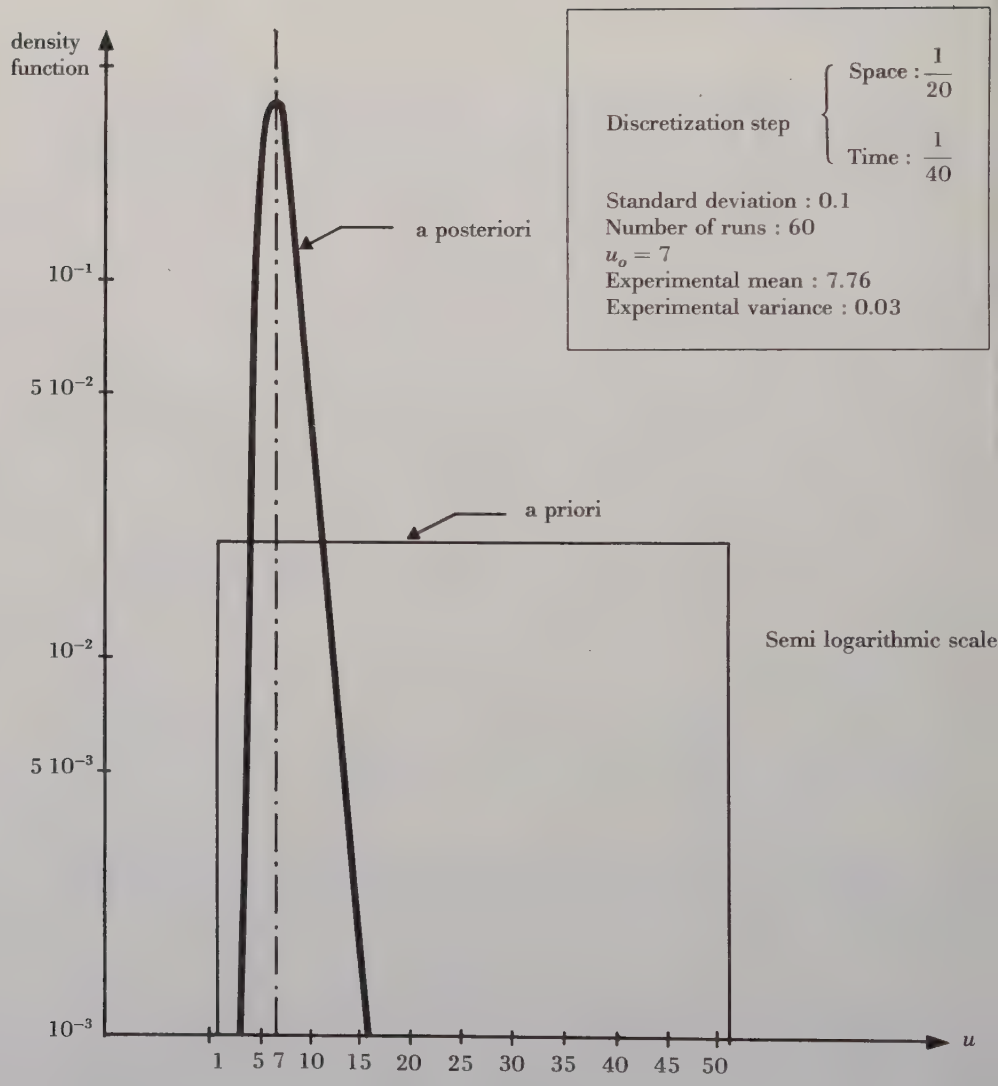
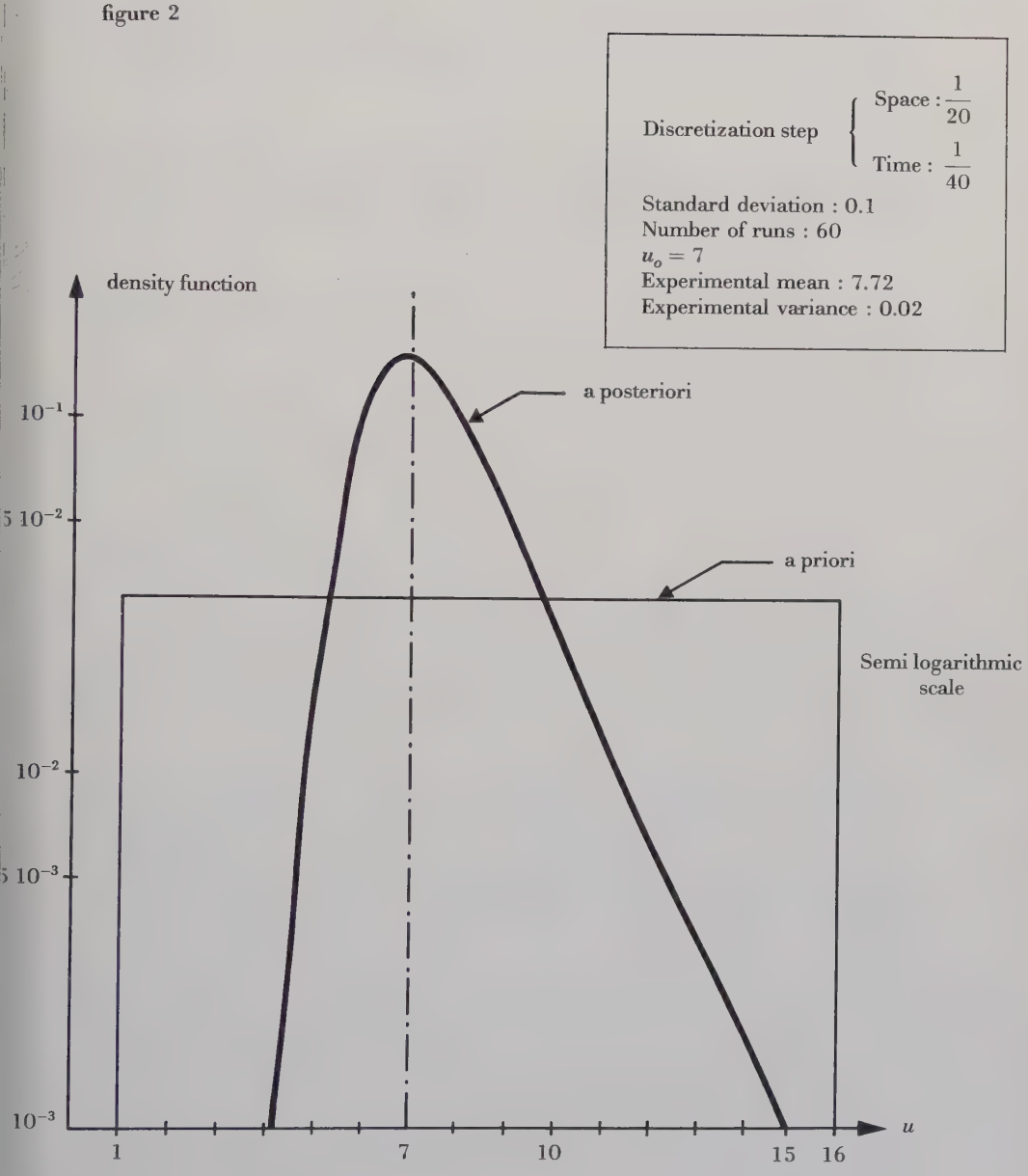

density function
Discretization step
Space : 1/20
Time : 1/40
Standard deviation : 0.1
Number of runs : 60
$u_o = 7$
Experimental mean : 7.76
Experimental variance : 0.03
a posteriori
a priori
Semi logarithmic scale
10^{-1}
$5\ 10^{-2}$
10^{-2}
$5\ 10^{-3}$
10^{-3}
1 5 7 10 15 20 25 30 35 40 45 50
u

figure 2


Discretization step
Space : 1/20
Time : 1/40
Standard deviation : 0.1
Number of runs : 60
$u_o = 7$
Experimental mean : 7.72
Experimental variance : 0.02
density function
a posteriori
a priori
Semi logarithmic scale
10^{-1}
$5\ 10^{-2}$
10^{-2}
$5\ 10^{-3}$
10^{-3}
1
7
10
15
16
u

On introduit alors, pour chaque e_h^j , la solution p_j de

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p_j}{\partial t} - u\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} = 0 \\ &-u\frac{\partial p_j}{\partial x}(t\ ,\ 0) = e_h^j(t) \\ &u\frac{\partial p_j}{\partial x}(t\ ,\ 1) = 0 \\ &p_j(\mathrm{T}\ ,\ x) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

On approxime alors (1.7) par un système linéaire, en discrétisant en temps et en espace, par les méthodes de RAVIART [49], (par exemple). Soit $p_\rho^j(t\ ,\ x\ ;\ u)$ l'approximation de p_j. Le vecteur $\tau_h\,\overline{\mathrm{Y}}_\rho(u)$ est défini par ses composantes

$$\left(\tau_h\,\overline{\mathrm{Y}}_\rho(u)\right)_j = \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_0^1 dx\ \gamma\ \mathrm{Cos}\ \pi x\ e^{\beta\pi^2 t}\ p_\rho^j(t\ ,\ x\ ;\ u). \qquad (1.8)$$

La loi de probabilité à priori du paramètre u, est prise uniforme. Alors l'estimateur de Bayes approché est fourni par

$$\hat{u}_{h\rho}(\tau_h\,\mathrm{Y}_d) = \frac{\displaystyle\int_a^b du\ u\ e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1}\left(\tau_h\,\mathrm{Y}_d - \tau_h\,\overline{\mathrm{Y}}_\rho(u)\right)_j^2}}{\displaystyle\int_a^b du\ e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1}\left(\tau_h\,\mathrm{Y}_d - \tau_h\,\overline{\mathrm{Y}}_\rho(u)\right)_j^2}} \qquad (1.9)$$

1.3 - Résultats numériques.

Comme $\tau_h\,\mathrm{Y}_d$ est aléatoire (cf. formule (1.5)), la formule (1.9) définit une variable aléatoire. On ne peut obtenir ses caractéristiques (espérance mathématique et variance), que de manière expérimentale. Pour cela on fait un grand nombre de passages (Runs) de l'algorithme, et on calcule la moyenne expérimentale et la variance expérimentale. On a représenté certains résultats obtenus sur les figures 1 et 2.

Remarque 1.1 : Nous avons choisi une loi de probabilité à priori *très mauvaise*, pour tester l'algorithme dans un cas *très défavorable*. Nous constatons que les écarts sont acceptables (vraie valeur $u_0 = 7$, moyenne expérimentale 7,76). Les résultats sont bien meilleurs lorsque la loi de probabilité à priori est plus précise. En particulier, on peut repasser le programme en prenant comme nouvelle loi de probabilité à priori, la loi de probabilité à postériori obtenue après un passage. On affine ainsi, de plus en plus, l'estimation.

Remarque 1.2 : Les calculs ont été faits sur UNIVAC 1108. Les temps de calcul sont très convenables.

2 - Identification de valeur initiale.

2.1 - Le modèle.

Nous nous plaçons dans le cadre du n° 20, chapitre 2. Nous considérons le modèle

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + \mathrm{A}(t)\,y = f \\ &y\big|_\Sigma = 0 \\ &y(0) = v \in \mathrm{H} \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

où v est inconnu [1]. L'observation se fait sur la surface, soit

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = \psi\,(t) \in L^2\,(\Sigma). \qquad (2.2)$$

Il s'agit d'estimer v, de façon que (2.1) et (2.2) soient compatibles. Nous supposons, conformément au n° 20.1, que pour la valeur ψ considérée, le problème possède une solution. Mais alors, d'après le théorème de MIZOHATA [39], cette solution est *unique* (ce qui simplifie la situation par rapport au n° 20).

2.2 - Méthode.

La méthode est celle indiquée au n° 20. On introduit deux fonctions $y_1 \equiv y_1\,(v)$ et $y_2 \equiv y_2\,(v)$, solutions des problèmes A et B suivants :

$$A = \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + A\,(t)\,y_1 = f \\ y_1|_\Sigma = 0 \\ y_1\,(0) = v \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\partial y_2}{\partial t} + A\,(t)\,y_2 = f \\ \left.\dfrac{\partial y_2}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = \psi \\ y_2\,(0) = v. \end{cases}$$

On cherche ensuite v de façon à minimiser

$$J\,(v) = \| y_1\,(v) - y_2\,(v) \|^2_{L^2\,(Q)}. \qquad (2.3)$$

Comme v n'est pas supposé appartenir à un borné de H, on régularise (2.3), en considérant

$$J_\lambda\,(v) = \| y_1\,(v) - y_2\,(v) \|^2_{L^2\,(Q)} + \lambda\,|\,v\,|^2_H. \qquad (2.4)$$

Pour définir le problème discrétisé, nous n'avons pas utilisé la méthode de pénalisation, préférant profiter à plein du fait que la fonctionnelle $J_\lambda\,(v)$ est quadratique. Nous avons considéré l'équation d'Euler relative à la minimisation de $J_\lambda\,(v)$, soit, si u désigne l'élément cherché :

$$\left(\overline{y_1}\,(u) - \overline{y_2}\,(u)\,,\,\overline{y_1}\,(v) - \overline{y_2}\,(v)\right)_{L^2\,(Q)} + \lambda\,(u\,,\,v)_H =$$

$$\left(z_0 - y_0\,,\,\overline{y_1}\,(v) - \overline{y_2}\,(v)\right)_{L^2\,(Q)},\ \forall\, v \in H, \qquad (2.5)$$

où $\overline{y_1}\,(v)$ et $\overline{y_2}\,(v)$ sont solutions des problèmes A′ et B′ suivants :

$$A' = \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + A\,(t)\,\overline{y_1} = 0 \\ \overline{y_1}|_\Sigma = 0 \\ \overline{y_1}\,(0) = v \end{cases}$$

(1) bien entendu, la situation est différente de celle de 20.1, où $y\,(0)$ était connu et l'opérateur $A\,(t\,;\,v)$ dépend du paramètre inconnu.

$$B' - \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{y}_2}{\partial t} + A(t)\,\overline{y}_2 = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \overline{y}_2}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = 0 \\ \overline{y}_2(0) = v \end{cases}$$

et y_0 , z_0 sont solutions des problèmes A″ et B″ suivants :

$$A'' = \begin{cases} \dfrac{\partial y_0}{\partial t} + A(t)\,y_0 = f \\ y_0|_\Sigma = 0 \\ y_0(0) = 0 \end{cases}$$

$$B'' = \begin{cases} \dfrac{\partial z_0}{\partial t} + A(t)\,z_0 = f \\ \left.\dfrac{\partial z_0}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = \phi \\ z_0(0) = 0\,. \end{cases}$$

On se définit alors une famille d'approximations stable et convergente de $H = L^2(\Omega)$. En utilisant les notations de 2.4, Chap. II, on pose

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^0} u_h^M\, W_{hM}(x) \qquad (2.6)$$

et on approche (2.5) par le problème discrétisé

$$\sum_{M \in \Omega_h^0} u_h^M \left(\overline{y}_1(W_{hM}) - \overline{y}_2(W_{hM}) , \overline{y}_1(W_{hP}) - \overline{y}_2(W_{hP})\right)_{L^2(Q)} \qquad (2.7)$$
$$+ \lambda\, h_1 \dots h_n\, u_h^P = \left(z_0 - y_0 , \overline{y}_1(W_{hP}) - \overline{y}_2(W_{hP})\right)_{L^2(Q)} ; \forall\, P \in \Omega_h^0\,.$$

Le système (2.7) est un système d'équations linéaires. Pour en calculer les coefficients, on utilise des approximations de $\overline{y}_1(W_{hM})$ et $\overline{y}_2(W_{hM})$ obtenues par des procédés d'intégration numérique courants. On peut montrer [10] que la discrétisation de u est totalement *indépendante* de la discrétisation de $\overline{y}_1$ et $\overline{y}_2$.

2.3 - **Résultats numériques.**

On a considéré l'exemple

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0\ ,\ x \in\ ]0,1[\ ,\ t \in\ ]0,T[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \pi\, e^{-\pi^2 t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(1,t) = -\pi\, e^{-\pi^2 t} \end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

La fonction $u(x) = \sin \pi x$ est l'unique fonction telle que

$$y(x\ ,\ 0) = u(x) = \sin \pi x \qquad (2.9)$$

soit compatible avec (2.8). La fonction $y(t\ ,\ x)$ solution de (2.8) et (2.9) est

$$y(t\ ,\ x) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x\ ^{(1)}. \qquad (2.10)$$

Les résultats numériques sont présentés dans les courbes 3 et 4.

(1) Bien entendu, on a construit l'exemple à rebours.

figure 3

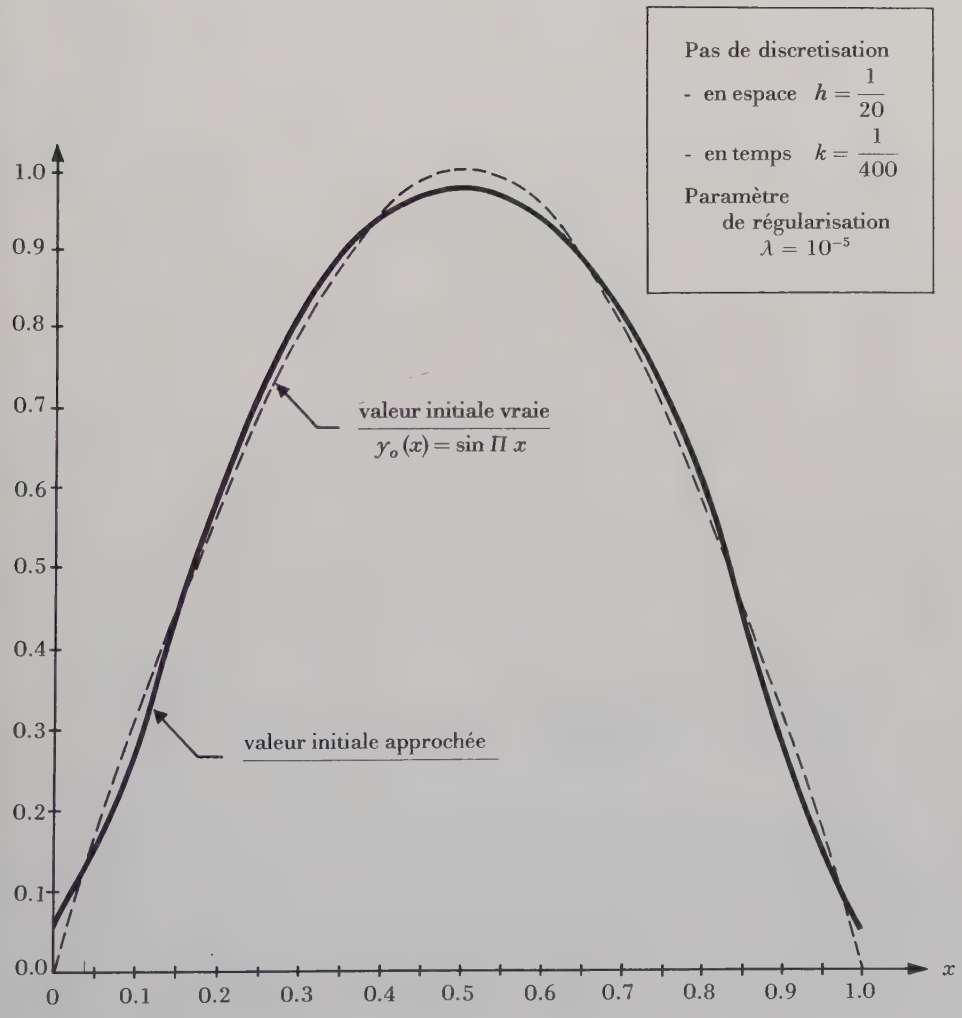
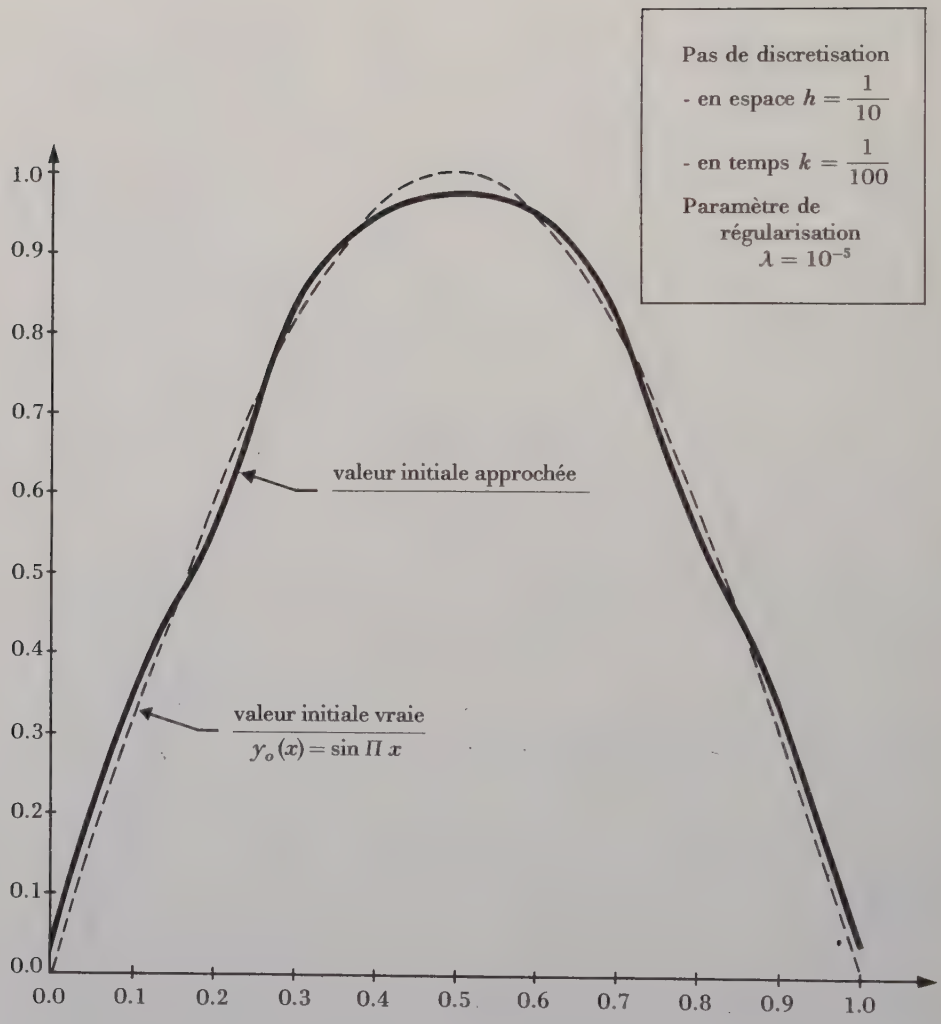

Pas de discretisation
- en espace $h = \frac{1}{20}$
- en temps $k = \frac{1}{400}$
Paramètre de régularisation
$\lambda = 10^{-5}$
valeur initiale vraie
$y_o(x) = \sin \Pi x$
valeur initiale approchée
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
x

figure 4


Pas de discretisation
- en espace $h = \frac{1}{10}$
- en temps $k = \frac{1}{100}$
Paramètre de régularisation
$\lambda = 10^{-5}$
valeur initiale approchée
valeur initiale vraie
$y_o(x) = \sin \Pi x$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0

Bibliographie

[1] Actes du congrès de l'IFAC, Prague (Juin 1967).

[2] AOKI (M), Optimization of stochastic systems, Academic Press, New York (1967).

[3] AUBIN (J.-P.), Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels, thèse, Paris (1966).

[4] BALAKRISHNAN (A.-V.), A new computing technique in system identification, à paraître au Journal of computer and system Sciences.

[5] BARUCHA-REID (A.T.), On the theory of random equations, Proc. symposium Applied Math., 16, 40 - 69, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[6] BENSOUSSAN (A.), C.R. acad. Sc. Paris, 265, série A, p. 724-727; 266, série A, p. 1.229 - 1.232.

[7] BENSOUSSAN (A.), C.R. acad. Sc. Paris, à paraître.

[8] BENSOUSSAN (A.), Identification of parameters of systems governed by partial differentiel equations, 2nd International Conference on Computing methods in Optimization problems, San Remo (Septembre 1968).

[9] BENSOUSSAN (A.), Contrôle optimal stochastique de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles paraboliques, à paraître.

[10] BENSOUSSAN, BOSSAVIT, NEDELEC, Approximation des problèmes de contrôle, à paraître (Cahiers de l'Institut de recherche en informatique et automatique), Paris.

[11] BENSOUSSAN (A.) et KENNETH (P.), Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation, à paraître, Revue d'informatique et de recherche opérationnelle, n° 13.

[12] BOURRET (R.-C.), J. Phys, 40, 782 - 790.

[13] BUCY (R.-S.) et JOSEPH (P.-D.), Filtering for stochastic processes with applications to guidance, Inter science, New York (1968).

[14] BUCY (R.-S.) et KALMAN (R.-E.), New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME J., Basic Engineering (1961).

[15] CEA (J.), Approximation variationnelle des problèmes aux limites, Ann. Inst. Fourier, 14 (1964), p. 345 - 444.

[16] CHOQUET (G.), Mesures affines et cylindriques, colloque d'analyse fonctionnelle, Rome (Mars 1968).

[17] DOOB (J.-L.), Stochastic Processes, Wiley, New York (1953).

[18] DOUGLAS Jr (J.) et JONES (S.), The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Journal of Maths and Mechanics (1962), vol. II, p. 919 - 926.

[19] DYNKIN (E.-B.), Markov Processes, vol. 1 - 2, Springer Verlag, Berlin (1965).

[20] FAURRE (P.), Conférences du Centre d'automatique de l'Ecole des Mines, Fontainebleau (Avril 1968).

[21] FELLER (W.), An introduction to probability theory and its applications. II, Wiley and sous (1966).

[22] FERNIQUE (X.), Processus Linéaires, Processus généralisés, Annales Institut Fourier, Grenoble, 17.1 (1967).

[23] FRISCH (U.), La propagation des ondes en milieu aléatoire et les équations stochastiques, Institut d'astrophysique, Paris (1966).

[24] GELFAND (I.-M.) et VILENKIN (N.Ya), Generalized Functions, vol. 4. Applications

of harmonic analysis, Academic Press, New York (1964).

Traduction française

GUELFAND (I.-M.) et VILENKIN (N.Ya), Les distributions, Tome IV. Les applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris.

[25] HO (B.L.) et KALMAN (R.-E.), Effective construction of linear state variable models from imput/output data.

[26] IRVING (E.), Identification des systèmes. Revue des études et recherches E.D.F., série C, Janv. Fév. (1969).

[27] ITO (K.), On stochastic differential equations, Mémoires Amer, Math. Soc. n° 4 (1951).

[28] KALMAN (R.-E.), On the general theory of control systems, Proc. First international congress on Automatic control, Moscow (1960).

[29] KAWAMOTO (Y.) et VIDAL (J.-J.), Functions space approach to parameter identification systems, à paraître.

[30] KENDALL (M.-G.) et STUART (A.), The advanced theory of statistics, Charles Griffin and C°, Londres (1961).

[31] KRAICHNAN (R.H.), Dynamics of non linear stochastic systems, Journal of math. phys., vol. 2, n° 1 (Janvier, Fév. 1961).

[32] LATTES (R.) et LIONS (J.-L.), Méthode de quasi réversibilité et applications, Dunod, Paris (1967).

[33] LEE (R.C.K.), Optimal estimation, Identification and control, MIT Press, Cambridge (Massa.), (1964).

[34] LIONS (J.-L.), *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer Verlag, Berlin* (1961).

[35] LIONS (J.-L.), *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris* (1968).

[36] LIONS (J.-L.), Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Université de Montréal (Oct. 1963).

[37] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.), Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1 - 2 - 3, Dunod, Paris (1968).

[38] LUENBERGER (D.-G.), Observing the state of a linear system, IEEE Trans. Military Electronics 8, n° 2, 74.80 (1964).

[39] MIZOHATA (S.), Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mém. coll. Sc. Univ. Kyoto, série A, *31*, (1958), p. 219 - 239.

[40] MONRO (S.), ROBBINS (H.), A stochastic approximation method, Ann. Math. Stat. *22*, n° 1 (1951).

[41] MOREAU (J.-J.), Fonctionnelle convexes, Collège de France (1966-1967).

[42] MOURIER (E.), Eléments aléatoires dans un espace de Banach, Ann. Inst. H. Poincaré, vol. 13 (1953).

[43] NEVEU (J.), Processus aléatoires gaussiens, Séminaire Math. Sup., Montréal (1968).

[44] NEVEU (J.), Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris (1964).

[45] PEARSON (J.-D.), Duality and a decomposition technique, J. SIAM control, vol. 4, n° 1 (1966).

[46] PEARSON (J.-D.), On the duality between estimation and control, J. SIAM control,

vol. 4, n° 4 (1966).

[47] PHILLIPSON (G.-A.) et MITTER (S.-K.), Numerical solution of a distributed identification problem via a direct method, 2nd International conference on computing methods in Optimization problems, San Remo (Septembre 1968).

[48] RAVIART (P.-A.), Cours faculté des sciences de Rennes (1966-1967).

[49] RAVIART (P.-A.), Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, Thèse, Paris (1965).

[50] ROCKAFELLAR (R.-T.), Duality theorem for convex functions, Bull. Annex. Math. Soc., 70 (1964), p. 189-192.

[51] SCHWARTZ (L.), *Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires*, Cours 3e cycle (Institut H. Poincaré), (1964-1965).

[52] SCHWARTZ (L.), *Radon measures on arbitrary Topological spaces*, à paraître, Tata institute of Fundamental Research, Bombay.

[53] SCHWARTZ (L.), Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I - II. Annales Institut Fourier, *7* (1957), p. 1.141, *8* (1959), p. 1.209.

[54] SCHWARTZ (L.), Théorie des Noyaux, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1950, *1*, p. 220 - 230.

[55] SIBONY (M.), Thèse à paraître.

[56] TARTAR, à paraître.

[57] TEMAM (R.), Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Thèse, Paris (1967).

[58] VIDAL (J.-J.), Use of digital filtering in Identification of Time-Space-Varying Coefficients in distributed Operators, 2nd International Conference on Computing methods in Optimization Problems, San Remo (Septembre 1968).

[59] WANG, Advances in control systems, édité par LEONDES, vol. I, Academic Press.

[60] WIENER (N.), The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, Wiley (1949).

[61] YOSIDA (K.), *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin (1966).

[62] YVON (J.-P.), Thèse 3e cycle, à paraître (Cahiers de l'IRIA).

Editions AGIP - 15 rue Auber - Paris 9e
Imprimeries SCHIFFER Paris

DEUXIÈME THESE

Propositions données par la Faculté

« Sur quelques ensembles aléatoires »

Vu et approuvé :

Paris, le 6 Mars *1969*

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. Zamansky

VU

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris,

J. Roche